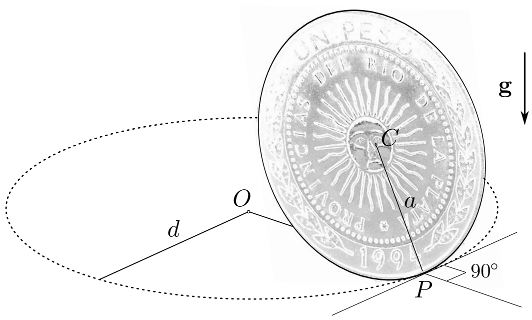
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2011 – Segundo parcial (1/12/2011)

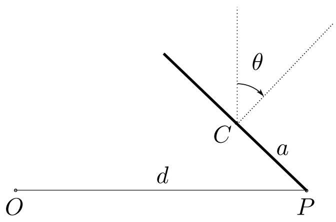
P1. (4 puntos) Un disco rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. El punto de contacto P se encuentra siempre sobre el círculo de radio d con centro en el origen O. En todo instante, el plano que contiene al disco intersecta al plano horizontal según la dirección perpendicular a OP. El disco tiene masa m y radio a, y sus momentos de inercia principales son $I_1 = I_2 = ma^2/4$ e $I_3 = ma^2/2$. Hay gravedad.

a) Escribir el Lagrangiano del sistema.

b) Mostrar que existen soluciones de las ecuaciones de movimiento en las cuales el centro del disco se mueve a velocidad constante sobre un círculo horizontal de radio fijo.

c) Encontrar el período de revolución del centro del disco como función de la distancia d y del ángulo θ mostrado en la figura.





P2. (3 puntos) Para el problema del trompo simétrico sostenido desde su centro de masa.

a) Exprese el Hamiltoniano en función de las coordenadas y momentos generalizados.

b) Usando la técnica de Hamilton-Jacobi, dar una expresión explícita o implícita para $\theta(t), \phi(t), \psi(t)$ en términos de derivadas paramétricas de integrales (reducir a cuadraturas, θ, ϕ, ψ son los ángulos de Euler).

Datos: $I_1 = I_2 = I$ e I_3: momentos principales de inercia con respecto al centro de masa.

P3. (3 puntos) El Hamiltoniano que describe una partícula relativista de masa en reposo nula en un potencial atractivo kx^2 es: $H = c|p| + kx^2$.

a) Dibujar las trayectorias en el espacio de fases. Obtener las ecuaciones dinámicas e integrarlas explícitamente para la condición inicial $x(0) = x_0 > 0$, $p(0) = 0$. (**Ayuda:** Emplee las trayectorias en el espacio de fases para evaluar $|p|$ en cada región). Encuentre explícitamente el período del movimiento, expresándolo en función de $E = kx_0^2$ (energía inicial).

b) Use el formalismo de variables ángulo-acción para verificar lo obtenido en a).