Guía 2 - Ejercicios 5, 10, 11

Principios Variacionales - Simetrías

Ejercicio 5

5. Según el principio de Fermat, la luz sigue una trayectoria que hace extrema la integral $\int_1^2 n(x,y)\,ds$, donde $n(x,y)$ es el índice de refracción del medio que la luz atraviesa. El problema se supone bidimensional. Muestre que si $n(x,y) = n_0(1 + y/h)$, donde n_0 y h son constantes, la trayectoria de la luz está dada por $y = -h + (\alpha h/n_0)\cosh(\beta + n_0 x/\alpha h)$, donde α y β son constantes de integración. (*Ayuda:* considere las ecuaciones de Euler−Lagrange.)

Este ejercicio se aleja un poco de los sistemas que vemos en esta materia (en principio, es un sistema que estudiaríamos en F2). La idea acá es hacer uso de la herramienta del cálculo variacional para obtener información acerca de la trayectoria de la luz en un medio.

El principio de Fermat establece que el trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es estacionario respecto a posibles variaciones de la trayectoria. Por lo general, esta trayectoria minimizará el tiempo de recorrido. Podemos ver que la expresión presentada en el enunciado es equivalente a la extremación del tiempo, usando la definición de índice de refracción $n = c/v$ (donde v es la velocidad de propagación de la luz en el medio, y c en el vacío)

$$I = \int_1^2 n(x,y)ds = \int_1^2 \frac{c}{v}ds = \int_1^2 \frac{c}{ds/dt}ds = c\int_1^2 dt = c\tau \tag{1}$$

Como c es constante, $\delta I = 0 \leftrightarrow \delta\tau = 0$. Notamos que el principio de Fermat es equivalente al principio de Hamilton si definimos a la acción como

$$I = \int_1^2 n(x,y)ds \tag{2}$$

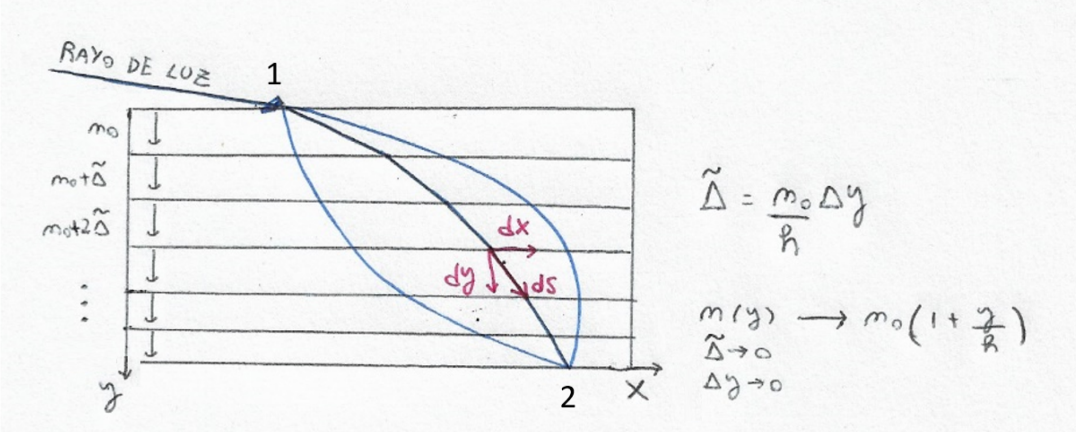


Figura 1: Esquema del problema. Las flechas negras indican la direccion de incremento del índice de refracción. En azul, los posibles trayectos de la luz del punto 1 al 2. En este tipo de medios materiales, si recordamos un poco de F2, podemos considerar *capas* de índice de refracción constante n_i que aumentan un factor Δ proporcional a la variación de altura Δy. Se puede tomar el límite en el que $\Delta \to 0$ y $\Delta y \to 0$, es decir, el número de capas tiende a infinito a medida que su *ancho* tiende a cero, manteniendo constante la variación de n con respecto a y. En este caso, se llega a un medio continuo inhomogeneo con un gradiente de índice de refracción constante. Si un haz de luz incide en el material con un cierto ángulo de inclinación con respecto a la normal a la superficie, su trayectoria se curva. Esto es lo que sucede con los espejismos o cuando se tiene un gradiente de concentración en un medio líquido al introducir cierto soluto.

Por lo tanto, si encontramos el Lagrangiano asociado a esta acción, entonces encontrar el camino que minimice I equivaldría a resolver las ecuaciones de Lagrange. Sin embargo, lo que tenemos acá es una integral de camino que parecería depender de dos variables x, y ¿Cómo podemos construirlo? En principio, el lagrangiano debería tener una pinta de este tipo $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. Veamos qué pasa si parametrizamos una variable en función de la otra (es válido, ya que lo que buscamos es aquella curva que extreme I). Lo que tenemos es una integral de camino entre dos puntos 1 y 2 (cómo se muestra en la figura). Entonces, podemos reescribir al diferencial de línea ds de la siguiente manera

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{3}$$

Ahora, ¿escribimos $x(y)$ o $y(x)$? Ambos caminos deberían ser equivalentes, sin embargo, $x(y)$ conlleva a una solución más directa

$$\left.\begin{array}{r} x = x(y) \\ dx = \frac{\partial x}{\partial y} dy \end{array}\right\} \to ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2} dy = \sqrt{1 + \dot{x}^2} dy \tag{4}$$

La acción queda reescrita como

$$I = \int_{y_1}^{y_2} n_0(1+y/h)\sqrt{1+\dot{x}^2}dy \longrightarrow \mathcal{L}(x,\dot{x},y) = n_0(1+y/h)\sqrt{1+\dot{x}^2} \tag{5}$$

Fíjense que obtuvimos un Lagrangiano donde x es una **coordenada cíclica** (es decir $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$). Resolver sus escuaciones de Euler-Lagrange será sencillo ya que sólo implican una derivada con respecto a $\dot{x}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \alpha \equiv cte \longrightarrow \frac{n_0(1+y/h)\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \alpha \tag{6}$$

Observación: si hubiésemos elegido parametrizar $y(x)$, habríamos llegado al siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}(y,\dot{y},x) = n_0(1+y/h)\sqrt{1+\dot{y}^2} \tag{7}$$

Es bastante similar, pero ya no tiene coordenadas cíclicas. Entonces, al momento de escribir sus ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos lo siguiente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{n_0}{h}\sqrt{1+\dot{y}^2} - \frac{d}{dt}\left[\frac{n_0(1+y/h)\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right] = 0 \tag{8}$$

Una ecuación de segundo orden que a priori, parecería necesitar más inglenio para ser resuelta.

Volviendo a nuestra ecuación 6, resolvamos para ver qué obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{n_0(1+y/h)\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} &= \alpha \\
\left[n_0(1+y/h)\right]^2 \dot{x}^2 &= \alpha^2(1+\dot{x}^2) \\
\frac{dx}{dy} &= \pm\frac{\alpha}{\sqrt{\left[n_0(1+y/h)\right]^2-\alpha^2}}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Realizando el siguiente cambio de variables la ecuación puede ser integrada fácilmente:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{n_0(1+y/h)}{\alpha} \\
dA &= \frac{n_0}{\alpha h}dy
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Obtenemos

$$
\int dx = \pm\frac{\alpha h}{n_0}\int\frac{1}{A^2-1}dA \tag{11}
$$

Y con un segundo cambio de variables

$$
\begin{aligned}
cosh(\theta) &= A \\
senh(\theta)d\theta &= dA
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Se llega a

$$
x = \pm\frac{\alpha h}{n_0}\int\frac{senh(\theta)}{\sqrt{cosh(\theta)^2-1}}d\theta = \pm\frac{\alpha h}{n_0}\theta+\bar{\beta} \tag{13}
$$

Haciendo los reemplazos necesarios, llegamos a verificar lo que se pide el problema (recordar que el coseno hiperbólico es par $cosh(\pm\theta) = cosh(\theta)$)

$$
y = \frac{\alpha h}{n_0}cosh(\frac{n_0}{\alpha h}x+\beta)-h \tag{14}
$$

Simetrías - Teorema de Noether

Decimos que un lagrangiano es invariante frente a alguna transformación de simetría si al transformar las coordenadas generalizadas siguiendo dicha simetría ($q_i \to q_i + \delta q_i$, $t \to t + \delta t$), las ecuaciones de movimiento no cambian. Dicho de otra forma, frente a una transformación de simetría, el lagrangiano resultante debe diferir del original con respecto a una derivada temporal

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{dF(\mathbf{q}, t)}{dt} \tag{15}$$

Recordamos que las ecuaciones de movimiento de dos lagrangianos son las mismas si éstos difieren en una derivada temporal (en la teórica vieron esto como que la transformación de simetría más general puede expresarse como $\delta\mathcal{L} = \frac{d\epsilon}{dt}$).

Lo que nos dice el **teorema de Noether** es que por cada simetría continua del lagrangiano existe una cantidad conservada. Si el lagrangiano es invariante frente a una transformación genérica como la que se muestra

$$\begin{cases} q_i' = q_i + \epsilon K_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ t' = t + \epsilon \Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{cases} \tag{16}$$

La magnitud conservada será la siguiente

$$\sum_i^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} K_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - h\Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - F(\mathbf{q}, t) = cte \tag{17}$$

Donde identificamos a los momentos canónicos conjugados p_i y a la función h

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \\ h = \displaystyle\sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} \end{cases} \tag{18}$$

Recordamos que esta función h puede ser la energía del sistema si se satisfacen las siguientes condiciones:

- La energía cinética es una función homogenea de grado 2 en las velocidades: $T(\mathbf{q}, \lambda\dot{\mathbf{q}}, t) = \lambda^2 T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

- El potencial no depende de las velocidades: $V \neq V(\dot{\mathbf{q}})$

Retomando el teorema de Noether en la ecuación 17, podemos sacar algunas conclusiones rápidas

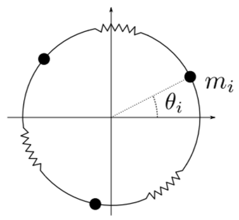
- Si el lagrangiano es invariante frente a traslaciones temporales (tomar $K_i = 0 \; \forall i$ y $\Theta = 1$), que es lo mismo que pedir que el lagrangiano no dependa explícitamente del tiempo ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$), entonces h se conserva ($\frac{dh}{dt} = 0$)

- Si el lagrangiano es invariante frente a una traslación de la coordenada q_i (tomar $K_i = 1$, $K_j = 0 \; \forall j \neq i$ y $\Theta = 0$), el momento canónico p_i se conserva. Esto sucede en el caso particular en que la coordenada q_i es cíclica, donde recuperamos que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = cte.$

Existen transformaciones de simetría más complejas que van a dar lugar a otro tipo de conservaciones. Van a poder trabajar con algunos ejemplos en los ejercicios que quedan de esta guía.

Ejercicio 10

10. Tres masas m_1, m_2 y m_3 están enhebradas en un aro circular fijo. Las masas interactúan a través de ciertos resortes, cuyo potencial es $V(\theta_i, \theta_j) = \frac{1}{2}k(\theta_i - \theta_j)^2$, donde $i, j = 1, 2, 3$, y k es una constante. En base a la simetría del lagrangiano –teorema de Noether– hallar qué magnitudes se conservan.



Tenemos un sistema de 3 masas enhebradas a un aro. Como la idea de este ejercicio es inferir conservaciones a partir de las simetrías en el lagrangiano, lo escribimos usando como coordenadas generalizadas los ángulos $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$

$$\mathcal{L} = \underbrace{\boxed{\frac{m_1}{2}R_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}R_1^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{m_3}{2}R_1^2\dot{\theta}_3^2}}_{\text{T}} - \underbrace{\boxed{\frac{k}{2}\left[(\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_2 - \theta_3)^2 + (\theta_3 - \theta_1)^2\right]}}_{\text{V}} \qquad (19)$$

Ahora, ¿cuáles son las simetrías de este lagrangiano? Vemos que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo, por lo tanto, la función h se conserva

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \longrightarrow h = cte \tag{20}$$

Además, como la energía cinética es homogenea de grado 2 en las velocidades y el potencial sólo depende de las coordenadas generalizadas, la función h es la energía del sistema. Si no están convencidos, pueden chequear esto calculando h de forma explícita usando la ecuación 18 y ver que efectivamente $h = T + V$.

Pero acá no terminan las simetrías. La idea es que se den cuenta de que, si bien no hay coordenadas cíclicas, existe una transformación de simetría que deja invariante $\mathcal{L}$. Esa transformación es una rotación rígida, que puede escribirse matemáticamente como un desplazamiento uniforme en todos los ángulos:

$$\theta_i' = \theta_i + K \tag{21}$$

Donde K es una constante arbitraria. Es fácil ver que $V(\theta_i + K, \theta_j + K) = V(\theta_i, \theta_j)$. Y por lo tanto, $\mathcal{L}(\bar{\theta}', \dot{\bar{\theta}}') = \mathcal{L}(\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}})$. Por el teorema de Noether, tenemos una magnitud conservada asociada a esta simetría. Usando la ecuación 17 vemos que

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = m_1 R_1^2 \dot{\theta}_1 + m_1 R_2^2 \dot{\theta}_2 + m_3 R_3^2 \dot{\theta}_3 = cte \tag{22}$$

Al igual que la conservación de la energía, podían llegar a este resultado utilizando los argumentos típicos de F1. Pueden chequear que la expresión de la ecuación 22 no es más que la proyección del momento angular en la dirección z. Y esto tiene sentido ya que las fuerzas elásticas y las normales al aro no hacen torque sobre el sistema.

Ejercicio 11

11. ¿Qué componentes de **p** y **L** se conservan para el movimiento de una partícula en los siguientes campos gravitatorios?

    (a) El producido por un elipsoide completamente asimétrico ($a \neq b \neq c$).

    (b) El producido por un plano infinito.

    (c) El producido por un cilindro circular infinito.

    (d) El producido por una hélice circular infinita.

    (e) El producido por una red unidimensional de puntos separados uno del otro una distancia d.

    (f) El producido por un toro circular.

(c)

Tenemos potencial de **simetría cilíndrica**, lo que significa que V no se ve afectado por rotaciones en torno al eje z, ni traslaciones sobre el eje z (las curvas euipotenciales son a radio ρ fijo)

$$V(\rho, \theta + \delta\theta, z + \delta z) = V(\rho, \theta, z) \longrightarrow V \equiv V(\rho) \tag{23}$$

Conviene expresar el lagrangiano escribiendolo en función de las coordenadas cilíndricas

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho) \tag{24}$$

Vemos que z y θ son coordenadas cíclicas, por lo que obtenemos del teorema de Noether las siguientes conservaciones

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} \\ p_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = mz \end{aligned} \tag{25}$$

Notamos que p_θ es la componente en z del momento angular de la partícula ($l_z\hat{z} = \rho\hat{\rho} \times m\rho\dot{\theta}\hat{\theta}$). Y además, p_z es la componente en z de su momento lineal.

(d)

Acá tenemos un potencial de **simetría helicoidal** circular, es decir que las líneas equipotenciales estarán dadas por helicoides de radio constante. Sin embargo, en este caso el potencial dependerá de todas las coordenadas ya que es necesario indicar en qué punto de la helicoide nos encontramos.

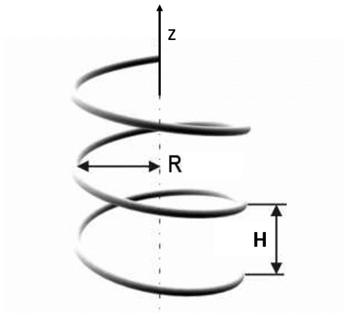


Figura 2: Helicoide

Para movernos sobre la helicoide, es necesario moverse simultáneamente en $\hat{z}$ y en $\hat{\theta}$. Observamos en la figura 2 que la transformación necesaria es la siguiente:

$$\begin{cases} z' = z + K_z \\ \theta' = \theta + K_\theta \end{cases} \tag{26}$$

Donde debe satisfacerse la siguiente relación

$$K_z = \frac{H}{2\pi} K_\theta \longrightarrow \delta z = \frac{H}{2\pi} \delta\theta \tag{27}$$

Si me muevo 2π (doy toda una vuelta), entonces incremento la distancia H. Con todo esto, vemos que nuevamente conviene escribir al Lagrangiano en coordenadas cilíndricas

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, \theta, z) \tag{28}$$

Ahora no tenemos más coordenadas generalizadas, por lo que ya no es válido decir que p_z y p_θ se conservan. Sin embargo, sabemos que existe una transformación de simetría que deja invariante al potencial ¿qué pasa con la cinética si aplicamos esta transformación? Como no depende de z ni θ, la energía cinética tampoco se modifica y por lo tanto podemos decir que $\mathcal{L}$ permanece invariante frente a traslaciones a lo largo de la helicoide. Entonces, existe una magnitud conservada asociada a esta simetría. Si aplicamos el teorema de Noether, podemos ver que esta magnitud es una combinacíon lineal de p_z y p_θ

$$p_z K_z + p_\theta K_\theta = K_\theta(\frac{H}{2\pi} m\dot{z} + m\rho^2\dot{\theta}) \longrightarrow \frac{H}{2\pi} m\dot{z} + m\rho^2\dot{\theta} = cte \tag{29}$$