Guía 6 - Ejercicios 8, 12

Transformaciones Canónicas

Introducción

En los ejercicios que vamos a ver en esta clase, vamos a trabajar con *transformaciones canónicas*, así que, repasemos un poco el tema. Dado un Hamiltoniano $\mathcal{H}$ que depende de las variables $\{q_i, p_i\}$, se dice que la transformación que lleva las variables originales a un nuevo conjunto $\{Q_i, P_i\}$ es canónica, si el nuevo Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}$ satisface las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i} = -\dot{P}_i, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} = \dot{Q}_i \tag{1}$$

Para ver cuáles son las transformaciones que pueden llamarse canónicas, podemos partir del principio de Hamilton, teniendo en cuenta que debe satisfacerse tanto en el conjunto de variables originales, como en el *nuevo*

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j \dot{q}_j p_j - \mathcal{H} \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j \dot{Q}_j P_j - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0 \tag{2}$$

La igualdad se satisface si se cumple lo siguiente

$$\sum_j \dot{q}_j p_j - \mathcal{H} = \sum_j \dot{Q}_j P_j - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{dF}{dt} \tag{3}$$

Donde introducimos la derivada temporal de una función arbitraria F, ya que no modifica la variación de la acción. Vemos que la expresión de la ecuación 2 puede reescribirse como

$$dF = \sum_j p_j dq_j - \sum_j P_j dQ_j + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right) dt \tag{4}$$

Por lo tanto, si existe una función $F(q_i, Q_i, t)$ que satisfaga las relaciones siguientes, la transformación es canónica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial q_i} = p_i \\ \dfrac{\partial F}{\partial Q_i} = -P_i \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = \tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H} \end{cases} \tag{5}$$

A esta función se la conoce como *función generatriz*, y a ésta en particular se la llama $F_1(q_i, Q_i, t)$. Como se deduce del nombre, existen la $F_2(q_i, P_i, t)$, $F_3(p_i, Q_i, t)$ y $F_4(p_i, P_i, t)$ también. Como se lo indica, cada una de estas funciones generatrices depende de una combinación particular de las variables originales y transformadas. A continuación, se resumen las condiciones que deben satisfacer cada función generatriz.

$$\begin{array}{cc} \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i \end{cases} & \begin{cases} \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i} = -P_i \end{cases} & \begin{cases} \dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i \\ \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i} = Q_i \end{cases} \end{array} \tag{6}$$

Además, es importante aclarar que no siempre se pueden hallar todas las funciones generatrices, es decir, la existencia de F_1 no garantiza la del resto. Sin embargo, en caso de existir al menos dos de ellas, éstas se relacionan mediante una transformada de Legendre. De forma resumida, si uno parte de una función $f(x, y)$ tal que

$$df = Adx + Bdy \tag{7}$$

pero desea expresar el problema en términos de las variables $\{A, y\}$, entonces se construye la función $g(A, y)$ realizando la siguiente transformación

$$f - Ax = g \longrightarrow dg = Bdy - xdA \tag{8}$$

que define unívocamente a g a menos de una constante. En la figura siguiente se muestra un esquema de cómo *saltar* de una a otra, sólo en caso de que existan.

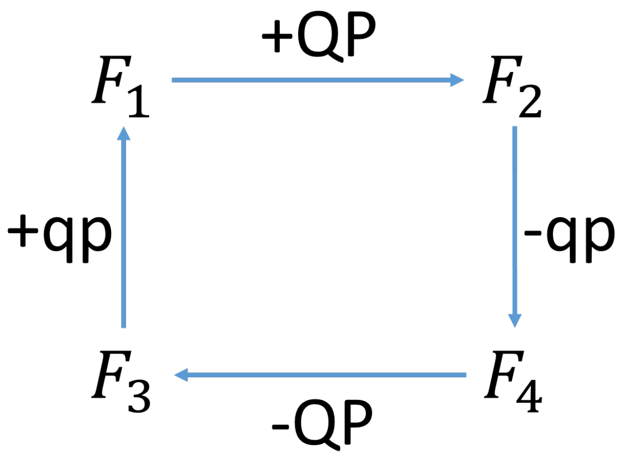

Figura 1

Corchetes de Poisson

En resumen, sabemos que estamos frente a una transformación canónica si es posible encontrar alguna de estas 4 funciones generatrices. Sin embargo, existe otro método, muchas veces más paráctico, para determinar si la transformación es canónica, y ese es mediante el uso de los **corchetes de Poisson**. La definición de los mismos es la siguiente: dado un conjunto de variables conjugadas $\{q_i, p_i\}$

$$\{f, g\} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j} \tag{9}$$

Es posible obtener una visión más intuitiva de esta definición observando lo siguiente: calculamos la derivada temporal de $f(q_i, p_i, t)$

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{10}$$

Luego, con la definición de la ec. 9, podemos expresar la derivada temporal de una función f arbitraria como

$$\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{11}$$

De aquí obtenemos que si f no depende explícitamente del tiempo, es una constante de movimiento si satisface $\{f, \mathcal{H}\} = 0$.

Dicho todo esto, una transformación es canónica si se satisfacen las siguientes reglas de corchetes

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \tag{12}$$

Notamos que en los corchetes se aclara en el subíndice con respecto a qué conjunto de variables se debe derivar. Los corchetes de Poisson son invariantes frente a transformaciones canónicas, por lo que es equivalente chequear las relaciones de la ecuación 12 invirtiendo las variables

$$\{q_i, q_j\}_{Q,P} = \{p_i, p_j\}_{Q,P} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{Q,P} = \delta_{ij} \tag{13}$$

La invariancia de los corchetes de Poisson frente a transformaciones canónicas debe también verificarse para dos funciones arbitrarias f y g, tal que

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \tag{14}$$

Ejercicio 8

8. Muestre que la transformación $Q = \ln(\frac{\sin p}{q})$, $P = q \cot p$ es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$. Aplique la transformación al oscilador armónico. Encuentre al menos 4 libros que incluyan este ejercicio. Encuentre al menos un libro en donde esta transformación sea aplicada con algún provecho.

Vamos a demostrar que la transformación es canónica encontrando alguna función generatriz. En este caso, yo elegí buscar la F_3. Podría haber elegido cualquiera, pero siempre conviene estar atentos a aquellos indicios que nos pueden sugerir que hay alguna función más fácil de calcular que otra. En este caso, es fácil ver que las variables q y P quedan escritas de forma muy sencilla en función de Q y p

$$\begin{cases} q = sen(p)e^{-Q} \\ P = cos(p)e^{-Q} \end{cases} \tag{15}$$

Por lo tanto, es conveniente trabajar con $F_3(Q, p)$ (notamos que en la transformación no aparece el tiempo de forma explícita, así que podemos imponer que $\partial_t F_3 = 0$). Recordando las relaciones ya vistas en la ec. 6, tenemos que

$$\frac{\partial F_3}{\partial p} = -q(p, Q) = -sen(p)e^{-Q} \tag{16}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q} = -P(p, Q) = -cos(p)e^{-Q} \tag{17}$$

Integramos la primer ecuación 16

$$F_3 = -\int sen(p)e^{-Q}dp = cos(p)e^{-Q} + C(Q) \tag{18}$$

Ahora, derivamos la ecuación 18 con respecto a Q y la igualamos a la ecuación 17

$$- cos(p)e^{-Q} + C'(Q) = -cos(p)e^{-Q} \Longleftrightarrow C'(Q) \equiv 0 \tag{19}$$

Como $C'(Q) = 0$, elejimos que $C(Q) = 0$ ya que toda función generatriz está definida a menos de una constante arbitraria. Luego, la transformación es canónica ya que

$$F_3 = cos(p)e^{-Q} \tag{20}$$

Ahora, buscamos las funciones $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$ como pide el enunciado.

$$F_1 = F_3 + qp \longrightarrow F_1(q, Q) = cos[p(q, Q)]e^{-Q} + qp(q, Q) \tag{21}$$

Se puede ver que

$$p = arcsen\left(qe^Q\right) \tag{22}$$

luego

$$F_1 = cos\left[arcsen\left(qe^Q\right)\right]e^{-Q} + q \cdot arcsen\left(qe^Q\right) = \sqrt{1 - sen^2\left[arcsen\left(qe^Q\right)\right]}e^{-Q} + q \cdot arcsen\left(qe^Q\right)$$

$$F_1(q, Q) = \sqrt{e^{-2Q} - q^2} + q \cdot arcsen\left(qe^Q\right) \tag{23}$$

Para encontrar $F_2(q, P)$ partimos de F_1

$$F_2 = F_1 + QP \tag{24}$$

Primero, buscamos $Q(q,P)$. Usando las ecs. 16 y 17 obtenemos que

$$
\begin{aligned}
Q(q,P) &= -\frac{ln(q^2+P^2)}{2} \\
p(q,P) &= arccot(P/q)
\end{aligned} \tag{25}
$$

reemplazando las ecs. 23 y 25 en la ec. 24, obtenemos que

$$
F_2(q,P) = q \cdot arccotg(P/q) + P\left[1 - \frac{1}{2} ln\left(P^2+q^2\right)\right] \tag{26}
$$

Por último, nos piden aplicar esta transformación al oscilador armónico

$$
\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \tag{27}
$$

Usando que

$$
\begin{aligned}
q^2 &= e^{-2Q} - P^2 \\
p^2 &= arcos^2\left(Pe^Q\right)
\end{aligned} \tag{28}
$$

Obtenemos

$$
\tilde{\mathcal{H}} = \frac{arcos^2\left(Pe^Q\right)}{2m} + \frac{\omega^2 m}{2}\left(e^{-2Q} - P^2\right) \tag{29}
$$

Por lo que vemos, la transformación canónica no simplificó en absoluto el problema.

Ejercicio 12

12. (a) Para una partícula calcule explícitamente los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ con las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Además calcule $[L_i, L_j]$ y $[L_i, L^2]$.

(b) Muestre que si dos componentes del momento angular se conservan, entonces se conserva el vector $\mathbf{L}$.

(c) ¿Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente momentos canónicos? *Idem* para H y L_z.

(d) ¿Pueden ser L_x y L_y simultáneamente momentos canónicos? *Idem* para L_x y L^2.

(e) ¿Se modifica el elemento de volumen en el espacio de las fases en una transformación canónica?

a) Partimos de la definición del corchete y calculamos

$$\{L_i, r_j\} = \sum_l \cancelto{0}{\frac{\partial L_i}{\partial r_l}\frac{\partial r_j}{\partial p_l}} - \frac{\partial L_i}{\partial p_l}\frac{\partial r_j}{\partial r_l} = -\sum_l \frac{\partial L_i}{\partial p_l}\delta_{jl} = -\frac{\partial L_i}{\partial p_j} \tag{30}$$

donde usamos que $\frac{\partial r_i}{\partial p_j} = 0$ y $\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij}$ ya que son variables independientes. Ahora, usamos que

$$L_i = r_j p_k - r_k p_j \longrightarrow \frac{\partial L_i}{\partial p_j} = -r_k \tag{31}$$

Notamos que, implícitamente, estamos asumiendo que los índices $\{i, j, k\}$ están ordenados dentro de una permutación par (es decir, $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ ó $(3,1,2)$). Por lo tanto, introducimos el tensor de Levi-Civita ϵ_{ijk}, que indica el signo de la permutación $\{ijk\}$. Si la permutación es par, entonces $\epsilon_{ijk} = 1$. Si es impar (por ejemplo (1,3,2), (2,1,3) y (3,2,1)), entonces $\epsilon_{ijk} = -1$. Luego

$$\{L_i, r_j\} = \epsilon_{ijk} r_k \tag{32}$$

(Notar que **no** se está utilizando la notación de Einstein)

Con $\{L_i, p_j\}$ se obtiene un resultado análogo

$$\{L_i, p_j\} = \epsilon_{ijk} p_k \tag{33}$$

Notemos que podíamos llegar a estos resultados de una forma aún mucho más directa si utilizabamos las propiedades

- $\{f, q_i\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$
- $\{f, p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}$

Para calcular $\{L_i, L_j\}$ utilizaremos las siguientes propiedades (les queda como ejercicio demostrarlas)

- $\{AB, C\} = B\{A, C\} + A\{B, C\}$
- $\{A + B, C\} = \{A, C\} + \{B, C\}$

$$\{L_i, L_j\} = \{r_j p_k - r_k p_j, r_k p_i - r_i p_k\} = \{r_j p_k, r_k p_i\} - \cancelto{0}{\{r_j p_k, r_i p_k\}} - \cancelto{0}{\{r_k p_j, r_k p_i\}} + \{r_k p_j, r_i p_k\} \tag{34}$$

Puede verse fácilmente que los dos términos cancelados dan cero cada uno. Para verlo más claro, expandamos el primer término cancelado de la siguiente manera

$$\{r_j p_k, r_i p_k\} = r_j\{p_k, r_i\}p_k + p_k\{r_j, r_i\}p_k + p_k\{r_j, p_k\}r_i + r_k\{p_j, p_k\}r_i = 0 \tag{35}$$

Cada uno de los términos de la ec. 35 se anula de forma individual ya que $\{r_i, r_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ y $\{r_i, p_j\} = \delta_{ij}$. Analicemos en detalle el término que no se cancela

$$\{r_j p_k, r_k p_i\} = r_j\{p_k, r_k\}p_i + \cancelto{0}{p_k\{r_j, r_k\}p_i} + \cancelto{0}{p_k\{r_j, p_i\}r_k} + \cancelto{0}{r_k\{p_j, p_i\}r_k} = -r_j p_i \tag{36}$$

De manera análoga

$$\{r_k p_j, r_i p_k\} = p_j \{r_k, p_k\} r_i = p_j r_i \tag{37}$$

Luego, sumando las ecs. 36 y 37

$$\{L_i, L_j\} = r_i p_j - r_j p_i \equiv L_k \longrightarrow \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k \tag{38}$$

donde introducimos nuevamente el operador de paridad, ya que veníamos asumiendo una permutación par.

Hecho esto, los corchetes $\{L_i, L^2\}$ salen directo utilizando las propiedades

$$\{L_i, L^2\} = \{L_i, \sum_l L_l^2\} = \sum_l \{L_i, L_l^2\} = 2 \sum_l \{L_i, L_l\} L_l = 2\epsilon_{ijk}(L_k L_j - L_j L_k) \tag{39}$$

b) Para este inciso, utilizaremos otra de las propiedades que deben demostrar: la identidad de Jacobi

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0 \tag{40}$$

Queremos demostrar que, si $\{L_i, \mathcal{H}\} = \{L_j, \mathcal{H}\} = 0$ entonces $\{L_k, \mathcal{H}\} = 0$. Para ello, notemos que con la ec. 38 podemos reescribir

$$\{L_k, \mathcal{H}\} = \{\{L_i, L_j\}, \mathcal{H}\} \tag{41}$$

Para no arrastrar términos, asumimos $\epsilon_{ijk} = 1$, pero el resultado sale de forma análoga si se considera el caso más general.

Por la identidad de Jacobi

$$\{\{L_i, L_j\}, \mathcal{H}\} = -\{\{L_j, \mathcal{H}\}, L_i\} - \{\{\mathcal{H}, L_i\}, L_j\} \tag{42}$$

Pero como $\{\mathcal{H}, L_i\} = \{\mathcal{H}, L_j\} = 0$ entonces $\{\{L_i, L_j\}, \mathcal{H}\} \equiv \{L_k, \mathcal{H}\} = 0$.

c) La idea es que los momentos canónicos deben satisfacer $\{p_i, p_j\} = 0$, por lo tanto, si los nuevos momentos son H y L^2, entonces $\{\mathcal{H}, L^2\} = 0$, lo que significa que L^2 debe ser una constante de movimiento.

d) Con lo hallado en el ítem **b)**, esta pregunta se responde sóla. El par L_x, L_y no pueden ser simultáneamente momentos canónicos a menos que $L_z = 0$. En el caso de L_x y L^2, sucede lo mismo (alguna de las componentes L_y o L_z debería ser nula).

e) Por último, nos preguntan si se modifica el elemento de volumen en el espacio de fases en una transformación canónica. La respuesta es que no se modifica, ya que el volumen en el espacio de fases es invariante frente a este tipo de transformaciones.

Vamos a demostrar lo dicho en el párrafo anterior mediante el uso de **transformaciones canónicas infinitesimales**. Supongamos una tranformación identidad de tipo $F_2(q_i, P_i)$

$$F_2(q_i, P_i) = \sum_j q_j P_j \tag{43}$$

En esta transformación es fácil ver que $p_i = P_i$ y $q_i = Q_i$. Ahora, perturbamos levemente la transformación identidad utilizando una función $G(q_i, P_i)$ multiplicada por un parámetro infinitesimal $\epsilon << 1$.

$$F_2(q_i, P_i) = \sum_j q_j P_j + \epsilon G(q_i, P_i) \tag{44}$$

Utilizando las relaciones correspondientes a esta función, vemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \longrightarrow P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \\
\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \longrightarrow Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Ahora bien, como $\epsilon << 1$, usando que $\delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$ podemos aproximar la derivada de la siguiente manera

$$
\frac{\partial G}{\partial P_i} = \frac{\partial G}{\partial (p_i + \delta p_i)} \sim \frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{46}
$$

De esta forma, una transformación infinitesimal en el espacio de fases determina las siguientes relaciones

$$
\begin{cases}
P_i = p_i - \epsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_i} \\
Q_i = q_i + \epsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_i}
\end{cases}
\tag{47}
$$

notemos que originalmente definimos $G(q_i, P_i)$, pero ahora la reescribimos como $G(q_i, p_i)$.

Podemos ver que las variables $(q_1, ..., q_N, p_1, ..., p_N)$ estarán contenidas en una región U del espacio de fases que tendrá un volumen V dado por

$$
V = \int_U dq_1...dq_N dp_1...dp_N \tag{48}
$$

Al aplicar la transformación infinitesimal dada por la ec. 47, las variables $(Q_1, ..., Q_N, P_1, ..., P_N)$ pasarán a ocupar una región U' que tendrá un volumen

$$
V' = \int_{U'} dQ_1...dQ_N dP_1...dP_N \tag{49}
$$

Podemos determinar el volumen V' a través del Jacobiano dela transformación canónica

$$V' = \int_{U'} dQ_1...dQ_N dP_1...dP_N = \int_U J dq_1...dq_N dp_1...dp_N \tag{50}$$

Veamos entonces cómo se modifica el volumen calculando explícitamente J. Para ello, definimos a x_m y X_m (con $1 \leq m \leq 2N$) como el nuevo conjunto ordenado de variables $(q_1, ..., q_N, p_1, ..., p_N)$ y $(Q_1, ..., Q_N, P_1, ..., P_N)$, respectivamente. De esta forma

$$J = \frac{\partial(Q_1, ..., Q_N, P_1, ..., P_N)}{\partial(q_1, ..., q_N, p_1, ..., p_N)} = det\left(\frac{\partial X_m}{\partial x_n}\right) \tag{51}$$

Utilizamos esta notación para reescribir las ecuaciones 47

$$X_m = x_m + \epsilon g_m \tag{52}$$

con g_m la variable ordenada $\left(\frac{\partial G}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial G}{\partial p_N}, -\frac{\partial G}{\partial q_1}, ..., -\frac{\partial G}{\partial q_N}\right)$. Por lo tanto, se tiene que

$$J = det\left(\delta_{mn} + \epsilon\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\right) \tag{53}$$

Utilizamos ahora la siguiente propiedad para $\epsilon << 1$ y A_{mn} una matriz arbitraria

$$det(\delta_{mn} + \epsilon A_{mn}) = 1 + \epsilon \cdot tr(A_{mn}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{54}$$

Luego

$$J = 1 + \epsilon\sum_m \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \tag{55}$$

Sin embargo, si miramos con detalle el segundo término, podremos notar que se anula

$$\sum_{m}^{2N} \frac{\partial g_m}{\partial x_m} = \sum_{i}^{N} \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial q_i} = 0 \tag{56}$$

En conclusión, el Jacobiano es la unidad $J = 1$, lo que significa que $V' = V$, y por lo tanto, demostramos que las transformaciones infinitesimales no modifican el volumen del espacio de fases. Como toda transformación canónica finita se puede escribir como sucesión de transformaciones infinitesimales, el resultado se extrapola a transformaciones finitas. Noten que tomamos una transformación genérica, por lo que tranquilamente podríamos tomar $G = \mathcal{H}$ y $\epsilon = dt$. En este caso, obtenemos la demostración del teorema de Liouville, el cual nos dice que una evolución temporal del sistema dada por la función de Hamilton mantiene invariante el volumen en el espacio de fases.

Comentario útil para el ejercicio 13

Si calculamos la variación de una función debido a una transformación canónica infinitesimal, obtenemos lo siguiente

$$\delta f = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \right] = \epsilon \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right] = \epsilon \{f, G\} \tag{57}$$

con $\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}$ y $\delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$

Luego, si $f = \mathcal{H}$, vemos que $\mathcal{H}$ es invariante frente a una tranformación infinitesimal si $\delta \mathcal{H} = 0$. En otras palabras, si $\{\mathcal{H}, G\} = 0$, entonces G es una **simetría** del Hamiltoniano. Más aún, si G no depende explícitamente del tiempo, entonces G es una constante de movimiento. Es decir que las constantes de movimiento generan simetrías en el Hamiltoniano (en el teorema de Noether teníamos que toda transformación de simetría venía asociada a una constante de movimiento).