Guía 6 - Ejercicios 7, 8

Cuerpo Rígido

Ejercicio 7

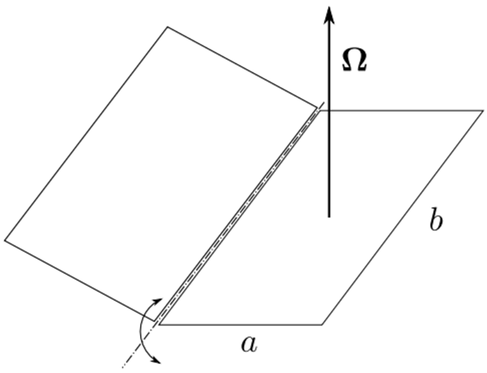
7. Dos placas rectangulares de lados a y b tienen espesor despreciable. Una de ellas se mantiene horizontal y está fija por su centro de masa a un eje que gira con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$ según el eje z. La otra placa está unida a la anterior por una bisagra ideal que le permite moverse como se indica en la figura. Determinar:

   (a) El lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en ausencia de gravedad.

   (b) ¿Existe algún punto de equilibrio estable?

   (c) El lagrangiano y las ecuaciones de movimiento con gravedad.

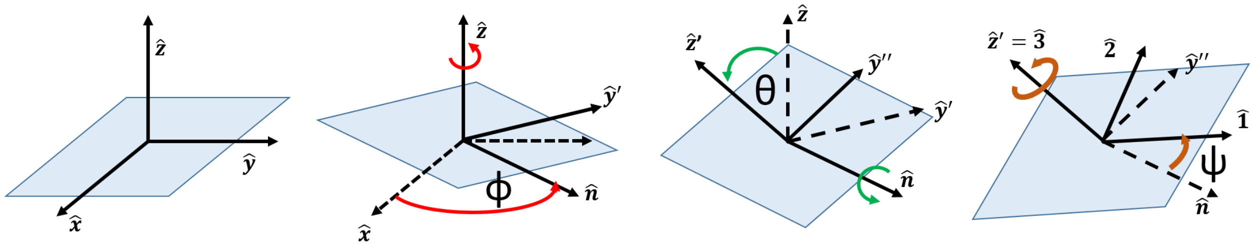
   (d) ¿Existe ahora algún punto de equilibrio estable?



Ángulos de Euler

Recordamos que un cuerpo rígido libre posee 6 grados de libertad: 3 de traslación y 3 de rotación. Una descomposición usual (si bien no es la única) es utilizar las 3 coordenadas espaciales para describir la posición del centro de masa del cuerpo rígido, y los ángulos de Euler para su rotación. Al usar ángulos de Euler, conviene trabajar con los ejes principales del cuerpo ya que éstos son los ejes que diagonalizan el tensor de inercia y trabajar con un tensor diagonal suele facilitar las cuentas.

Los ángulos de Euler son los que están representados en la siguiente figura. La idea es que estos tres ángulos constituyen una base a partir de la cual es posible representar cualquier rotación es un espacio de 3 dimensiones.



Matemáticamente, estas rotaciones pueden describirse mediante las siguientes matrices

$$R_\phi = \begin{pmatrix} cos\phi & sen\phi & 0 \\ -sen\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sen\theta \\ 0 & -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{R}_\psi = \begin{pmatrix} cos\psi & sen\psi & 0 \\ -sen\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

El proceso que está representando el dibujo es que si le aplicamos esta sucesión de rotaciones a los versores x, $\hat{y}$ y $\hat{z}$, llegamos a un sistema de ejes **fijo** al cuerpo $\hat{1}$, $\hat{2}$ y $\hat{3}$

$$\boldsymbol{R}_\psi \boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{R}_\phi \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{2} \\ \hat{3} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Entonces, sea un punto $\boldsymbol{x}_0$ fijo en el cuerpo rígido, la rotación de un sistema de ejes fijos al cuerpo con origen en ese punto se puede escribir de la siguiente manera

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\psi}\hat{3} \tag{3}$$

Ahora bien, si lo que nos interesa es medir la rotación del sistema de ejes **con respecto a ese punto $\boldsymbol{x}_0$**, entonces nos conviene reescribir la frecuencia en dicho sistema

$$\begin{aligned} \hat{z} \rightarrow \quad \boldsymbol{R}_\psi \boldsymbol{R}_\theta \hat{z} &= \begin{pmatrix} cos\psi & sen\psi & 0 \\ -sen\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sen\theta \\ 0 & -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\psi sen\theta \\ cos\psi sen\theta \\ cos\theta \end{pmatrix} \\ \hat{n} \rightarrow \quad \boldsymbol{R}_\psi \hat{n} &= \begin{pmatrix} cos\psi & sen\psi & 0 \\ -sen\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\psi \\ -sen\psi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Y así obtenemos

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} sen\psi sen\theta + \dot{\theta} cos\psi \\ \dot{\phi} cos\psi sen\theta - \dot{\theta} sen\psi \\ \dot{\phi} cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Si en cambio, por alguna razón necesitacemos medir la frecuencia con respecto al sistema original (x, y, z), entonces aplicamos la transformación inversa

$$\left.\begin{aligned} \hat{n} \rightarrow \quad & \boldsymbol{R}_\phi^{-1} \hat{n} \\ \hat{3} \rightarrow \quad & \boldsymbol{R}_\phi^{-1} \boldsymbol{R}_\theta^{-1} \hat{3} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} sen\theta sen\phi + \dot{\theta} cos\phi \\ -\dot{\psi} cos\phi sen\theta + \dot{\theta} sen\phi \\ \dot{\psi} cos\theta + \dot{\phi} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Observación: $\boldsymbol{R}_\theta^{-1} = \boldsymbol{R}_{-\theta}$

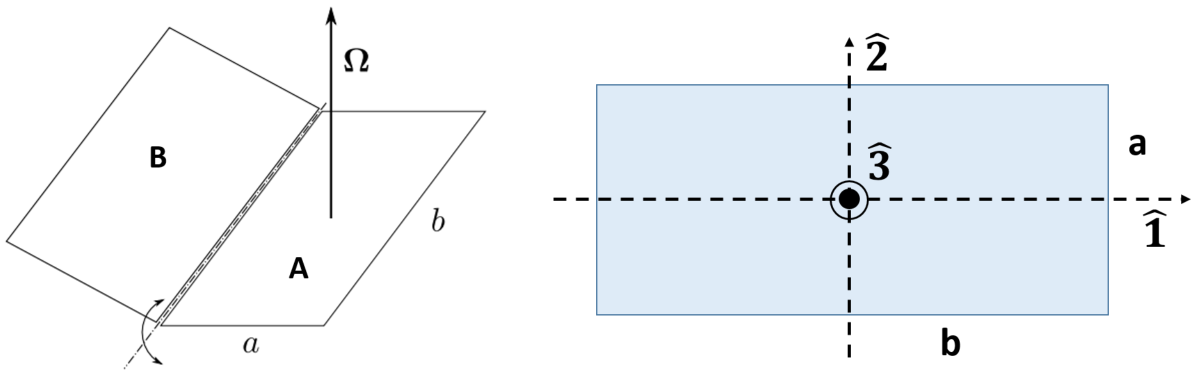
Ejercicio 7

Dicho todo esto, arranquemos con el ejercicio. Tenemos que hallar el lagrangiano del sistema y escribir sus ecuaciones de movimiento. Vamos a necesitar la energía cinética del sistema, y la potencial en el caso que consideremos la gravedad. Vamos primero con la energía cinética. Recordemos cómo escribir la energía cinética de un cuerpo rígido. En su forma más general, la energía puede escribirse como (les queda como ejercicio demostrar esta expresión, para eso, consideren que el cuerpo está formado de N partículas elementales y la velocidad de cada una puede escribirse como $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\Omega}$)

$$T = \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_0|^2 + M(\boldsymbol{X}_{CM} - \boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^t \cdot \boldsymbol{I}^0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{x}_0$ es un punto arbitrario en el cuerpo rígido, $\boldsymbol{v}_0$ la velocidad de dicho punto, $\boldsymbol{I}^0$ el tensor de inercia calculado desde el punto $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{\Omega}$ la frecuencia angular del cuerpo rígido con respecto al punto $\boldsymbol{x}_0$, expresada en el mismo sistema de ejes que $\boldsymbol{I}^0$.

El sistema está compuesto por dos placas como se muestra en la figura, marcando sus ejes principales



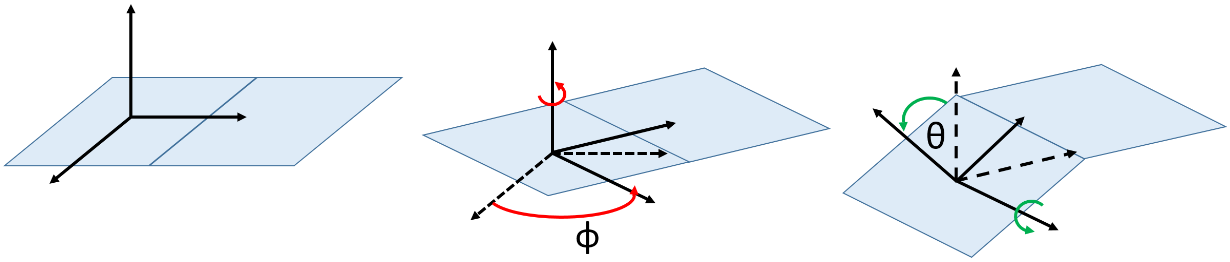
Describiremos a cada placa a partir de la posición de su centro de masa y la rotación con respecto a este, usando los ejes principales. Escribimos la energía de la tabla A: su centro de masa está fijo, así que solo aporta energía cinética de rotación en $\hat{z}$

$$T_A = \frac{1}{2}mI_3\Omega^2 \tag{8}$$

Como T_A es constante, no nos modifica el lagrangiano. Pasemos a escribir la energía cinética de B. Escribiendo la energía desde el centro de masa, la ecuación 7 queda

$$T_B = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_B^t \boldsymbol{I} CM \omega_B \tag{9}$$

donde $\boldsymbol{I}^{CM}$ es el tensor de inercia calculado desde el centro de masa. Vamos con el término de rotación. Veamos con el siguiente dibujo que solo necesitamos dos ángulos de Euler para describir la rotación de B



A partir de la expresión 5, escribimos la frecuencia correspondiente. Notamos que, $\dot{\phi} \equiv \Omega$ y como no hay rotación en torno a $\hat{3}$ ($\dot{\psi} = 0$), entonces podemos fijar el ánglulo ψ según nos convenga. Elegimos $\psi = 0$

$$\boldsymbol{\omega}_B = \dot{\theta} \cdot \hat{1} + \Omega sen\theta \cdot \hat{2} + \Omega cos\theta \cdot \hat{3} \tag{10}$$

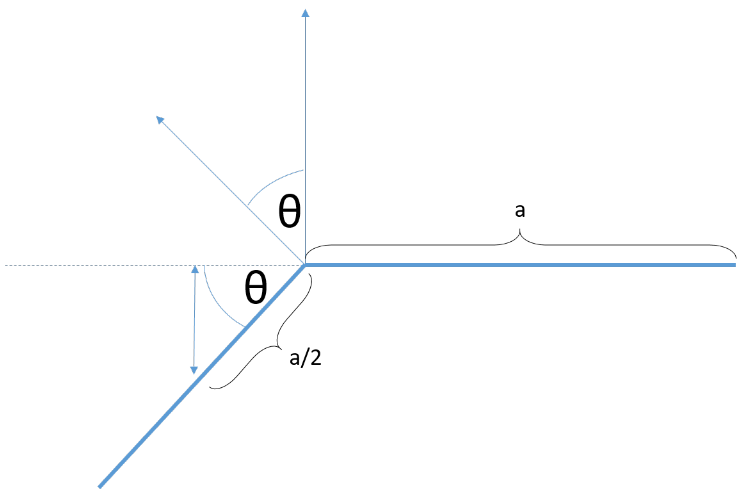
La energía cinética de rotación queda entonces

$$T_B^{rot} = \frac{1}{2}\left[I_1\dot{\theta}^2 + I_2\Omega^2 sen^2\theta + I_3(\Omega cos\theta)^2\right] \tag{11}$$

Calculamos los momentos de inercia $I_{ij} = \int_V (\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) dV$

$$\boldsymbol{I} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Escribimos ahora la energía cinética del centro de masa



A partir de la figura, y definiendo β tal que $\dot{\beta} = \Omega$, vemos que

$$\boldsymbol{x}_B = -\frac{a}{2} sen\theta \hat{z} + \frac{a}{2}(1 + cos\theta)\hat{\rho}(\beta)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_B = -\frac{a}{2}\dot{\theta} cos\theta \hat{z} - \frac{a}{2}\dot{\theta} sen\theta \hat{\rho}(\beta) + \frac{a}{2}\Omega(1 + cos\theta)\hat{\beta} \tag{13}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_B^2 = \frac{a^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{a^2}{4}\Omega^2(1 + cos\theta)^2$$

Juntando todo, llegamos a que

$$T_B = \frac{ma^2}{6}\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 cos^2\theta\right) + \frac{ma^2}{4}\Omega^2 cos\theta \tag{14}$$

En el caso en que haya gravedad, restamos el potencial $V = -\frac{mga}{2} sen(\theta)$. Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{ma^2}{6}\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 cos^2\theta\right) + \frac{ma^2}{4}\Omega^2 cos\theta + \frac{ma}{2} g sen(\theta) \tag{15}$$

Les dejo como ejercicio encontrar las ecuaciones de movimiento para los casos con y sin gravedad.

Para encontrar los puntos de equilibrio, notemos que la función h se conserva ya que $\partial_t \mathcal{L} = 0$. Sin embargo, **no** se puede afirmar que $h = E$ ya que la energía cinética $T_B + T_A$ no es homogenea de grado 2 en las velocidades. Entonces, calculamos h

$$h = \dot{\theta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} = \frac{ma^2}{6}\dot{\theta}^2 - \left(\underbrace{\boxed{\frac{ma}{2}gsen(\theta) + \frac{ma^2}{6}\Omega^2 cos^2\theta + \frac{ma^2}{4}\Omega^2 cos\theta}}_{\mathrm{V}_{eff}} \right) \tag{16}$$

Los equilibrios van a estar dados por los ángulos que satisfagan $\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial \theta}\right|_{\theta_{eq}} = 0$. Para el caso en el que no hay gravedad tenemos que

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \theta} = 0 \Longleftrightarrow sen\theta(4cos\theta + 3) = 0 \tag{17}$$

Luego, tenemos equilibrios en $sen\theta = 0$ (o sea que hay 2 equilibrios estables) y $cos\theta = -3/4$ (es más difícil de ver, hay 2 equilibrios inestables). Para ver si son estables o inestables, calculamos la derivada segunda

$$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \theta^2} \propto \frac{\partial}{\partial \theta}\left[sen\theta(4cos\theta + 3)\right] = 4cos^2\theta - 4sen\theta + 3cos\theta = \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad sen\theta = 0 \\ < 0 & \text{si} \quad cos\theta = -3/4 \end{cases} \tag{18}$$

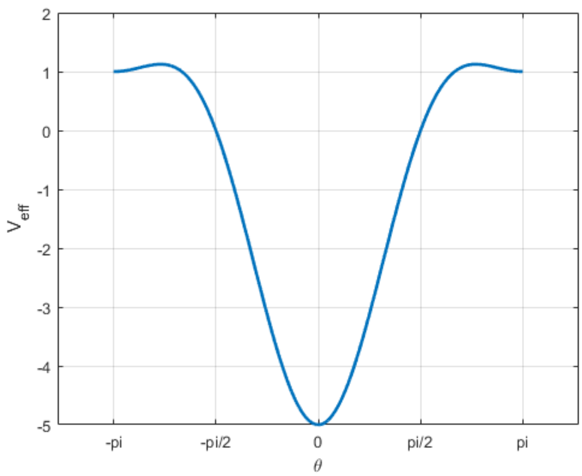


Figura 1: Tomando $\frac{ma^2}{12}\Omega^2 = 1$

En caso en que $g \neq 0$ tenemos que

$$V_{eff} = -\frac{ma^2}{12}\Omega^2\left(\frac{6g}{a\Omega^2}sen\theta + 2cos^2\theta + 3cos\theta\right) \tag{19}$$

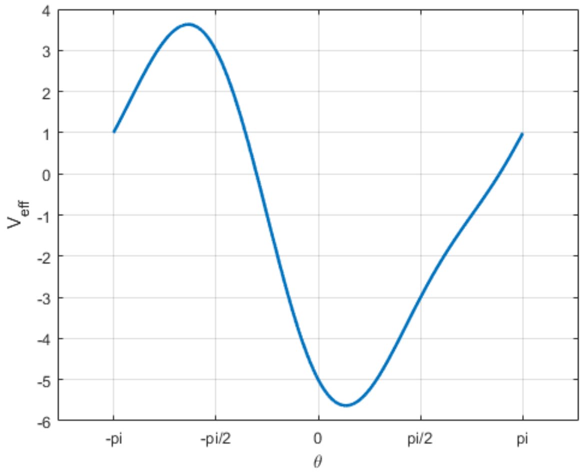


Figura 2: Tomando $\frac{ma^2}{12}\Omega^2 = 1$ y $\frac{6g}{a\Omega^2} = 3$

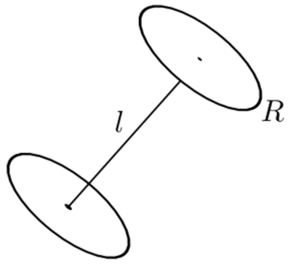
Ejercicio 8

8. Los centros de dos volantes de radio R y masa m se encuentran unidos por una barra de longitud l. El ángulo formado por la barra y el plano de cada volante es siempre de $90°$. Cada volante gira libremente sobre sí mismo.

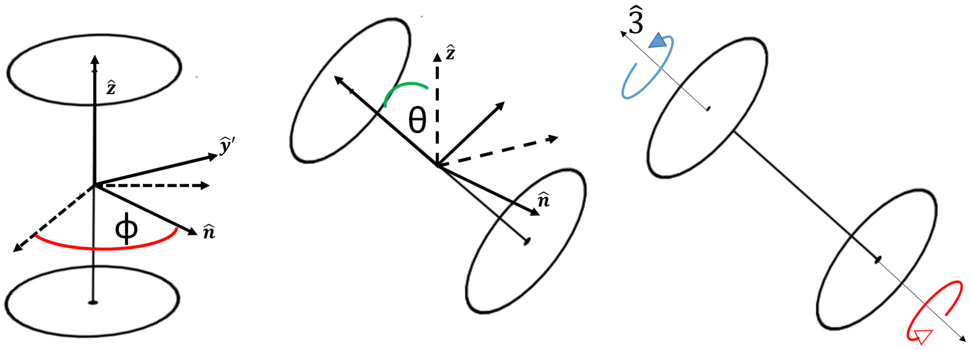
   (a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

   (b) Escriba el lagrangiano y encuentre constantes de movimiento. ¿Es $h = E$?

   (c) Escriba las ecuaciones de movimiento.



Primero nos preguntan cuántos grados de libertad tiene el sistema. Es fácil ver que si el sistema tiene su centro fijo (el punto sobre la barra equidistante entre los dos discos), sólo nos hace falta 4 ángulos para describir la configuración del sistema: θ, ϕ, ψ_1 y ψ_2.



Ahora, si lo dejamos moverse libremente, debemos agregar las tres coordenadas cartesianas para describir la posición del centro de masa del sistema X_{CM}, Y_{CM} y Z_{CM}. En conclusión, el sistema tiene 7 grados de libertad.

Antes de escribir el Lagrangiano, calculemos el tensor de inercia de un disco medido desde su centro de masa. Es importante notar que los discos tienen simetría axial, lo que significa que tendremos una degeneración en los ejes principales. Sucede que existen infinitos ejes $\hat{1}$ y $\hat{2}$ que podemos usar siempre y cuando estén sobre la superficie del disco. Esto implica que $I_1 = I_2$. También pueden demostrar que $I_3 = I_1 + I_2$. Usando estas propiedades, calculamos

$$I_3 = \sigma \int_S (x^2 + y^2) r dr d\theta = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2} \rightarrow I_1 = I_2 \equiv I = \frac{MR^2}{4} \tag{20}$$

Listo, ahora busquemos el Lagrangiano. Como no hay fuerzas externas, lo único que necesitamos es la energía cinética del sistema. Una forma de encontrarla es planteando la energía del centro de masa de **todo** el sistema más la rotación de sus partes en torno al mismo. Si suponemos que el sistema está conformado por N partículas discretas de masa m_i, podemos escribir su posición y velocidad como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_i =& \boldsymbol{R}_{CM} + \boldsymbol{r}'_i \\ \boldsymbol{v}_i =& \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i \end{aligned} \tag{21}$$

Dicho esto, escribimos la energía total del sistema

$$T = \sum_i^N \frac{m_i}{2} \boldsymbol{v}_i^2 = \sum_i^N \frac{m_i}{2} |\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i|^2 = \sum_i^N \frac{m_i}{2} |\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}}|^2 + \frac{m_i}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i)^2 + m_i \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i) \tag{22}$$

Usamos que $\sum_i m_i = M \equiv 2m$ (donde m es la masa de cada disco). Nos queda entonces la energía cinética descompuesta en un término de rotación y otro de traslación del centro de masa

$$T = m\dot{R}_{CM}^2 + \sum_i^N \frac{m_i}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i)^2 + \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times m_i \boldsymbol{r}'_i) = T_{CM} + T_{rot} \tag{23}$$

Ahora, descomponemos T_{rot} en cada uno de los *tipos de partículas* que la forman:

- Partículas de la barra: $m_{bi} \equiv 0$
- Partículas del disco 1: m_{1i}

- Partículas del disco 2: m_{2i}

Sabemos que los dos discos tienen la misma masa, así que $m_{1i} = m_{2i}$, pero por el momento, vamos a seguir identificandolos por separado. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} T_{rot} = \sum_i^{N/2} \frac{m_{1i}}{2} (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}'_{1i})^2 + \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times m_{1i} \boldsymbol{r}'_{1i}) \\ + \sum_i^{N/2} \frac{m_{2i}}{2} (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}'_{2i})^2 + \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times m_{2i} \boldsymbol{r}'_{2i}) = T_{D1} + T_{D2} \end{aligned} \tag{24}$$

Recordemos que

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{B}^2 - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^2 \tag{25}$$

Analicemos T_{D1}

$$T_{D1} = \sum_i^{N/2} \boxed{\frac{m_{1i}}{2} \left[\boldsymbol{\omega}_1^2 \boldsymbol{r}'^2_{1i} - (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{r}'_{1i})^2 \right]} + \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times m_{1i} \boldsymbol{r}'_{1i}) \tag{26}$$

veamos en detalle el término resaltado. En este caso, el resultado puede obtenerse de forma más clara usando notación de índices (recordar que índices repetidos indican suma, por ejemplo $\sum_j x_j y_j \equiv x_j y_j$).

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}_i|^2 |\boldsymbol{\omega}|^2 &= |\boldsymbol{r}_i|^2 \omega_k \omega_l \delta_{kl} \\ (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i)^2 &= \omega_k \omega_l r_k^{(i)} r_l^{(i)} \end{aligned} \tag{27}$$

usando notación de índices, reescribimos el término recuadrado de la ec. 26

$$\sum_i^{N/2} \frac{m_{1i}}{2} \left[\boldsymbol{\omega}_1^2 \boldsymbol{r}'^2_{1i} - (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{r}'_{1i})^2 \right] = \omega_k^{(1)} \omega_l^{(1)} \sum_i^{N/2} \frac{m_{1i}}{2} \left[\boldsymbol{r}_{1i}^2 \delta_{kl} - r_k^{(1i)} r_l^{(1i)} \right] \tag{28}$$

recordando la definición del tensor de inercia

$$I_{kl} = \sum_{i}^{N} m_i \left[\boldsymbol{r}_i^2 \delta_{kl} - r_k^{(i)} r_l^{(i)} \right] \tag{29}$$

y así obtenemos

$$T_{D1} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^t \boldsymbol{I}^{(1)} \omega_1 + \sum_{i}^{N/2} \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times m_{1i} \boldsymbol{r}'_{1i}) \tag{30}$$

Arreglando un poco las expresiones, y usando que $m_{1i} = m_{2i} \equiv m_i$, la energía cinética total del sistema queda

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^t \boldsymbol{I}^{(1)} \omega_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_2^t \boldsymbol{I}^{(2)} \omega_2 + \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} \cdot \sum_{i}^{N/2} m_i \left[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}'_{1i}) + (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}'_{2i}) \right] \tag{31}$$

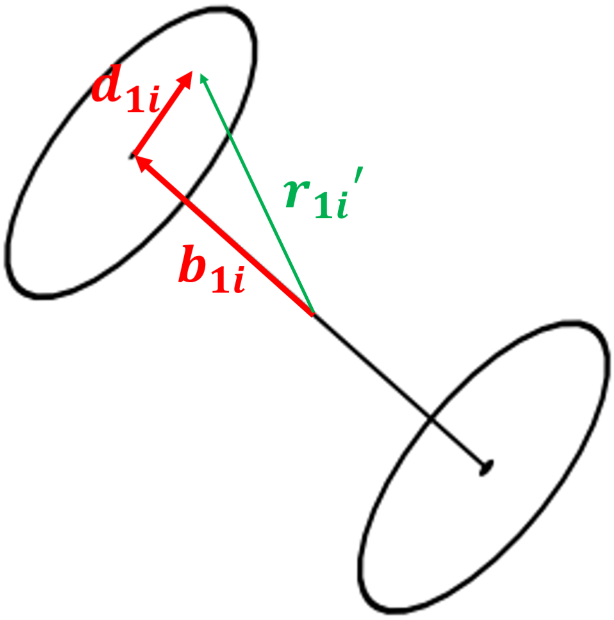
Si los dos discos compartieran la misma velocidad angular, el último término se cancelaría. Sin embargo, ahora no es tan directa la cuestión, así que hay que verlo con cuidado. Usando algunos argumentos geométricos, podemos ver que el último término se cancela. Notemos que las frecuencias de los dos discos solo difieren en su componente $\hat{3}$, es decir $\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 = (\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2)\hat{3}$. Entonces, conviene dividir la frecuencia de la siguiente manera

$$\boldsymbol{\omega}_i = \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\psi}_i \hat{3} \tag{32}$$

Entonces

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} \cdot \sum_{i}^{N/2} m_i \left[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}'_{1i}) + (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}'_{2i}) \right] = \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{CM}} \cdot \sum_{i}^{N/2} m_i \left[(\dot{\psi}_1 \hat{3} \times \boldsymbol{r}'_{1i}) + (\dot{\psi}_2 \hat{3} \times \boldsymbol{r}'_{2i}) \right] \tag{33}$$

pero esta suma da cero, porque estamos sumando sobre todos los elementos de un disco. Esto se puede ver realizando la siguiente descomposición que $\boldsymbol{r}'_{1i} = b_{1i}\hat{3} + \boldsymbol{d}_{1i}$ tal que $\hat{3} \cdot \boldsymbol{d}_{1i} = 0$ (idem con r_{2i})



Entonces

$$\sum_{i}^{N/2} m_i(\dot{\psi}_i\hat{3} \times \boldsymbol{d}_{1i}) = \dot{\psi}_i\hat{3} \times \sum_{i}^{N/2} m_i\boldsymbol{d}_{1i} = 0 \tag{34}$$

Después de muchas cuentas, llegamos a que

$$\mathcal{L} = m(\dot{X}^2_{CM} + \dot{Y}^2_{CM} + \dot{Z}^2_{CM}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t_1\boldsymbol{I}^{(1)}\omega_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t_2\boldsymbol{I}^{(2)}\omega_2 \tag{35}$$

Escribimos la rotación de los discos en torno al centro de masa. Como tienen simetría axial, $I_1 = I_2 \equiv I$, por lo que al escribir la rotación en términos de los ángulos de Euler se llega a una expresión sencilla

$$I_1(\dot{\phi}sen\psi sen\theta + \dot{\theta}cos\psi)^2 + I_2(\dot{\phi}cos\psi sen\theta - \dot{\theta}sen\psi)^2 \equiv I(\dot{\phi}^2 sen^2\theta + \dot{\theta}^2) \tag{36}$$

Y por lo tanto

$$T_{Di} = \frac{1}{2}I'(\dot{\phi}^2 sen^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi}cos\theta + \dot{\psi}_i)^2 \tag{37}$$

donde $I' = I + \frac{ml^2}{4}$ por el teorema de Steiner ($I'_{ij} = I_{ij} + m(|\boldsymbol{d}|^2\delta_{ij} - d_i d_j)$). El lagrangiano total queda

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \mathcal{L}_{CM} + T_{D1} + T_{D2}\\ \mathcal{L} =& m(\dot{X}_{CM}^2 + \dot{Y}_{CM}^2 + \dot{Z}_{CM}^2) + \frac{m}{4}(l^2 + R^2)(\dot{\phi}^2 sen^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{mR^2}{4}\left[(\dot{\phi}cos\theta + \dot{\psi}_1)^2 + (\dot{\phi}cos\theta + \dot{\psi}_2)^2\right]\end{aligned} \tag{38}$$

En cuanto a las magnitudes conservadas

- El momento lineal del centro de masa se conserva en toda dirección
- $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\phi}cos\theta + \dot{\psi}_i) \equiv P_{\psi,i}$
- $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{1}{2}m(l^2 + R^2)\dot{\phi}sen^2\theta + \frac{1}{2}(P_{\psi,1} + P_{\psi,2})cos\theta \equiv P_\phi$
- Como $\partial_t\mathcal{L} = 0 \longrightarrow h = cte$
- como $T(\lambda\dot{q}, q) = \lambda^2 T(\dot{q}, q)$ y no hay potencial, entonces $h = E$

La ecuación de movimiento del sistema (aprovechando las conservaciones de arriba)

$$\begin{aligned}\frac{m}{2}(l^2 + R^2)\ddot{\theta} =& \frac{1}{2}m(l^2 + R^2)\dot{\phi}^2 sen\theta cos\theta - \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}sen\theta\left(2\dot{\phi}cos\theta + \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2\right)\\ &\cdots\\ \frac{m}{2}(l^2 + R^2)\ddot{\theta} =& \frac{[P_\phi - (P_{\psi,1} + P_{\psi,2})cos\theta][P_\phi cos\theta - (P_{\psi,1} + P_{\psi,2})]}{\frac{m}{2}(l^2 + R^2)sen^3\theta}\end{aligned} \tag{39}$$