Guía 7 - Ejercicios 1, 2

Hamilton-Jacobi

Breve Repaso

La clase anterior vieron en acción el método de Hamilton-Jacobi, que es básicamente uno de los casos donde las transformaciones canónicas resultan útiles. La idea principal de este método es encontrar una función generatriz $F_2(q, P, t) \equiv S(q, P, t)$ (donde S es la denominada Función Principal de Hamilton) que nos lleve de un Hamiltoniano $H(q, p, t)$ complejo a uno más simple $\mathcal{K}(Q, P, t) = 0$ en el que podamos resolver la dinámica a través de ecuaciones diferenciales triviales. Una vez que resolvemos la dinámica en las variables Q y P, antitransformamos para hallar $q(Q, P, t)$ y $p(Q, P, t)$. La dificultad va a estar en encontrar esta función generatriz S, que satisface la ecuación a derivadas parciales

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(q, \nabla_q S, t) = 0. \tag{1}$$

Si la solución de esta ecuación depende del suficiente número de constantes no aditivas α_i,

$$S = S(q, \alpha, t), \tag{2}$$

podemos asignar sus lugares en la función S a los nuevos impulsos P, definiendo

$$F_2(q, P, t) = S(q, P, t). \tag{3}$$

La elección $\mathcal{K} = 0$ trae como consecuencia que las nuevas coordenadas sean constantes de movimiento, es decir $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$ y $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$ (desde ahora en más, siempre que Q_i y/o P_i sean constantes, usaremos esta notación) ya que

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \alpha_i} = 0, \qquad \dot{\alpha}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \beta_i} = 0. \tag{4}$$

Si el sistema es conservativo, ya vimos que la función S puede escribirse de la siguiente manera

$$S(q, \alpha_1, t) = W(q, \alpha_1) - \alpha_1 t, \tag{5}$$

donde la interpretación de α_1 es $\alpha_1 = \mathcal{H}$ y donde W satisface la siguiente ecuación

$$\mathcal{H}\Big(q, \nabla_q W(q, \alpha_1)\Big) = \alpha_1. \tag{6}$$

Estamos previendo que la solución de esta ecuación dependerá de $n-1$ otras constantes de integración (ninguna de ellas aditiva), de modo que será

$$W = W(q, \alpha), \qquad \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}. \tag{7}$$

Lo importante acá es notar que $W(q, \alpha)$ (también llamada función característica de Hamilton) depende de las variables necesarias para ser ella misma una función generatriz de tipo F_2. Si asignamos los lugares de las n constantes α a los nuevos n impulsos P queda

$$F_2(q, P) = W(q, P). \tag{8}$$

Como W no depende del tiempo, la transformación que genera deja invariante al Hamiltoniano

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}. \tag{9}$$

Pero debido a que W satisface la ec. (6), será

$$\mathcal{K}(Q, P) = \mathcal{H}\Big(q, \nabla_q W(q, P)\Big) = P_1. \tag{10}$$

Como las constantes de integración son arbitrarias, cualquier conjunto α puede ser reemplazado por un nuevo conjunto $\alpha' = \alpha'(\alpha)$. En particular, la constante α_1, podrá escribirse como una función predeterminada $\alpha_1 = E(\alpha')$. En tal caso, el nuevo hamiltoniano es (omitiendo los primados)

$$\mathcal{K}(Q, P) = E(\alpha). \tag{11}$$

En sistemas conservativos, uno puede optar entonces por trabajar con la función característica de Hamilton en vez de la principal. Hay que tener en cuenta que en este caso, las nuevas coordenadas Q no serán constantes de movimiento (mientras que los α lo seguirán siendo). Las ecuaciones triviales de movimiento quedan

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha_i} \Rightarrow Q_i = \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha_i} t + Q_0, \qquad \dot{\alpha}_i = -\frac{\partial E}{\partial Q_i} = 0. \tag{12}$$

En el caso más sencillo en que $E(\alpha) = \alpha_1$, todas las coordenadas Q_i salvo la primera son constantes mientras que

$$Q_1 = t + Q_0. \tag{13}$$

Esta transformación canónica abre la cancha para lo que se viene en las clases siguientes con las variables de Ángulo-Acción.

Ejercicio 1

1. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x en el potencial $V = a\sec^2(x/l)$, donde a y l son constantes positivas y x puede moverse entre $\pm\frac{\pi}{2}l$. Resuelva la ecuación de H–J encontrando una expresión integral para S. Encuentre $x(t)$ utilizando S.

Tenemos un sistema conservativo. Si usamos como coordenada generalizada a la posición x, el Hamiltoniano del sistema es la energía. Esta vez, vamos a resolver el problema utilizando la función característica de Hamilton $W(x, \alpha)$ (no S). Planteamos el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + a \cdot sec^2(x/l) \tag{14}$$

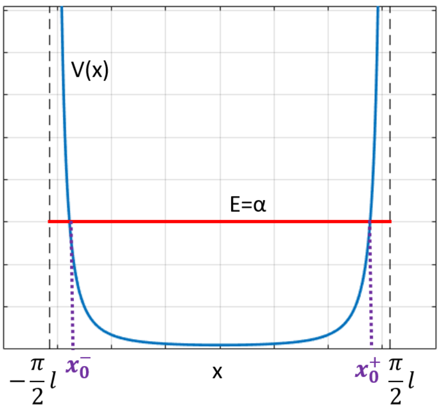

Figura 1: La particula va a oscilar entre los dos puntos de retorno dados por $x_0^{\pm}$

La transformación canónica que genera W deja invariante al Hamiltoniano

$$\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial W(x,\alpha)}{\partial x}\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + a \cdot sec^2(x/l) = \alpha \tag{15}$$

El foco del problema, planteado de esta forma, está en encontrar la función característica W

$$W(x, \alpha) = \pm\sqrt{2m}\int \sqrt{\alpha - a\sec^2(x/l)}dc \tag{16}$$

donde ahora incluimos en la definición de W explícitamente su dependencia en α . Sin embargo, no es necesario resolver esta ecuación para hallar la dinámica de $x(t)$. Basta recordar que

$$\frac{\partial W(x,\alpha)}{\partial \alpha} = Q(x,\alpha) \tag{17}$$

Entonces

$$Q(x,\alpha) = \pm\sqrt{2m}\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_0}^{x}\sqrt{\alpha - a\cdot sec^2(x/l)}dx = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\alpha - a\cdot sec^2(x/l)}} \tag{18}$$

Tomaremos como el punto inicial de integración al punto de retorno x_0^-. Reescribimos la integral de la ec. 18

$$Q(x,\alpha) = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0^-}^{x}\frac{cos(x/l)dx}{\sqrt{\alpha - a - \alpha sen^2(x/l)}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{\frac{1}{\alpha - a}}\int_{x_0^-}^{x}\frac{cos(x/l)dx}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{\alpha - a}sen^2(x/l)}} \tag{19}$$

Y ahora mediante el cambio de variables

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{\alpha}{\alpha - a}}sen(x/l) = U \\ \sqrt{\dfrac{\alpha}{\alpha - a}}cos(x/l) = ldU \end{cases} \tag{20}$$

Obtenemos

$$Q(x,\alpha) = \pm l\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\int_{U_0}^{U}\frac{dU}{\sqrt{1-U^2}} = \pm l\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}arcsen(U)\Big|_{U_0}^{U} \tag{21}$$

Recordamos que $U_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-a}} sen(x_0^-/l)$ donde x_0^- es un punto de retorno. En este punto, como $\dot{x} = 0$, se satisface la siguiente ecuación

$$\alpha = a \cdot sec^2(x_0^{\pm}/l) \longrightarrow x_0^{\pm} = l \cdot arcsen\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha - a}{\alpha}}\right) \tag{22}$$

Luego, $U_0 = \pm 1$ y por lo tanto

$$Q(x,\alpha) = \pm l\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\left\{arcsen\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - a}} sen(x/l)\right] + \frac{\pi}{2}\right\} \tag{23}$$

Para hallar $x(t)$, hacemos uso de la dinámica trivial del sistema escrito en las nuevas variables

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \alpha} = 1 = \dot{Q} \longrightarrow Q = t + Q_0 \equiv t - t_0 \tag{24}$$

La ecuación 23 queda

$$t - t_0 = l\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\left\{arcsen\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - a}} sen(x/l)\right] + \frac{\pi}{2}\right\} \tag{25}$$

Y a partir de la misma, despejamos $x(t,\alpha)$

$$x(t,\alpha) = l{\cdot}arcsen\left\{\sqrt{\frac{\alpha - a}{\alpha}} sen\left[\sqrt{\frac{2\alpha}{ml^2}}(t - t_0) - \frac{\pi}{2}\right]\right\} = -l{\cdot}arcsen\left\{\sqrt{\frac{\alpha - a}{\alpha}} cos\left[\sqrt{\frac{2\alpha}{ml^2}}(t - t_0)\right]\right\} \tag{26}$$

Como ejercicio, pueden intentar resolver el caso ($\alpha - a << a$) que corresponde a un oscilador armónico utilizando el formalismo de pequeñas oscilaciones, y comparar con el resultado obtenido.

Ejercicio 2

2. Considerar el sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1, q_2, $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema? Resuelva esta ecuación para encontrar la función principal de Hamilton S. Escriba la expresión integral para la función principal de Hamilton y las expresiones integrales que dan la órbita y la evolución temporal. ¿De qué sistema se trata?

Tenemos un sistema cuyo Lagrangiano se escribe de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} \tag{27}$$

Como $\partial_t \mathcal{L} = 0$, entonces el sistema es conservativo $\mathcal{H} = cte$. Además, $E = \mathcal{H}$ ya que la energía cinética es homogenea de grado 2 en las velocidades y el potencial no depende de las velocidades. A partir del Lagrangiano, calculamos los momentos conjugados p_i

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i(q_1^2 + q_2^2) \equiv p_i \tag{28}$$

Dicho todo esto, encontremos el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{2} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} \tag{29}$$

Como pide el problema, buscamos la ecuación de Hamilton-Jacobi, que como ya mencionamos, es (estoy eligiendo trabajar con la función S ya que es lo que nos pide el ejercicio)

$$\mathcal{H}\left(q_1, q_2, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{30}$$

Como el sistema es conservativo, tenemos que

$$S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}) = W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}) - \alpha_1 t \tag{31}$$

Por lo tanto, de la ecuación 29 deducimos

$$\frac{1}{2(q_1^2+q_2^2)}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2\right]+\frac{1}{q_1^2+q_2^2}=\alpha_1 \tag{32}$$

Como W se deriva por separado con respecto a las variables q_i, vamos a proponer que W es separable

$$W(\boldsymbol{q},\alpha_1)=W_1(q_1,\alpha_1)+W_2(q_2,\alpha_1) \tag{33}$$

Por lo tanto, dada esta propuesta, si multiplica a ambos lados de la ecuación 32 por $2(q_1^2+q_2^2)$

$$\underbrace{\boxed{\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2+1-2\alpha_1 q_1^2}}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\boxed{\left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2+1-2\alpha_1 q_2^2}}_{\mathrm{II}}=0 \tag{34}$$

cada uno de los boxes I y II depende de una sola variable q_i. Por lo tanto, la única forma de que la ecuación 34 de cero es si cada box es igual a una constante, es decir

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2+1-2\alpha_1 q_1^2=-\alpha_2\\[2ex]\left(\dfrac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2+1-2\alpha_1 q_2^2=\alpha_2\end{cases} \tag{35}$$

Vemos que nos apareció una nueva variable α_2 que en principio, no es más que una constante arbitraria. Sin embargo, recordando que la función W debe ser una función generatriz tipo F_2, nos hace falta que dependa de **dos** momentos ya que tenemos **dos** coordenadas. Como los nuevmos momentos deben ser constantes de movimiento, incluimos a α_2 variable de nuestra función.

Por otro lado, notemos que W_i depende únicamente de la coordenada q_i, pero puede depender de ambos momentos α_i en simultaneo. Además, de la ecuación 35 se puede ver que el diagrama de fases queda definido para cada par de variables conjugadas $\{q_i, p_i\}$ de forma separada. En este caso, los diagramas describirán hipérbolas en el plano q_i, p_i ya que las variables conjugadas satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{36}$$

notar que satisfacen esta ecuación ya que $\alpha_1 > 0$. Reescribiendo la ecuación 35 en función de los momentos tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{q_1^2}{(1+\alpha_2)/2\alpha_1} - \dfrac{p_1^2}{1+\alpha_2} = 1 \\ \dfrac{q_2^2}{(1-\alpha_2)/2\alpha_1} - \dfrac{p_2^2}{1-\alpha_2} = 1 \end{cases} \tag{37}$$

La orientación de la hipérbola dependerá del signo que tome $(1 \pm \alpha_2)$, respectivamente. Dichas orientaciones estarán separadas por una curva separatriz definida por la recta $p_i^2 = 2\alpha_1 q_1^2$ (en el caso del par $\{q_1, p_1\}$ cuando $\alpha_2 = -1$ y en el caso $\{q_2, p_2\}$ cuando $\alpha_2 = 1$). Noten que en este caso, la curva separatriz no separa a un movimiento de libración con otro de rotación (de hecho, no tenemos presente ninguno de estos dos en el sistema).

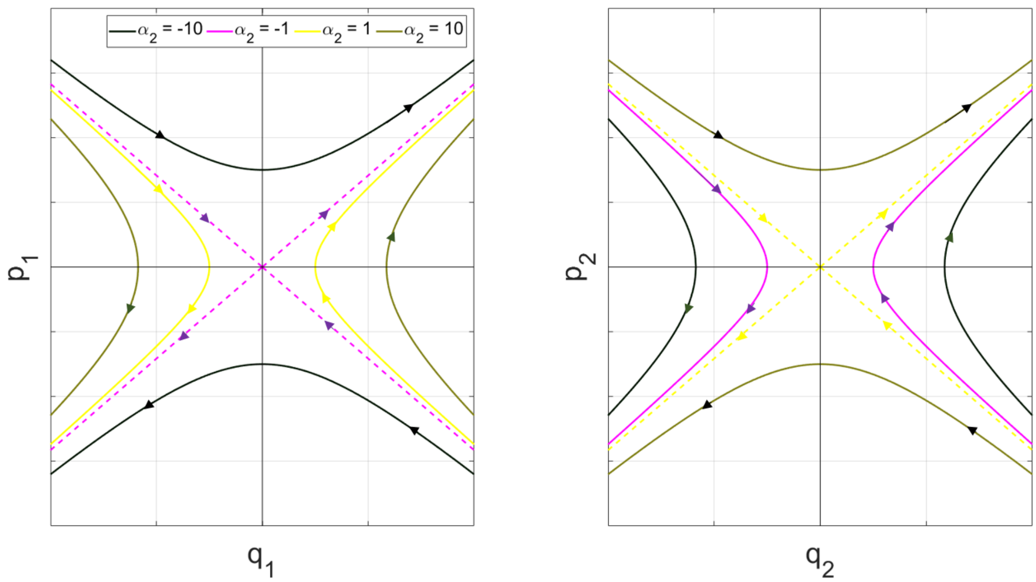

Figura 2: diagrama de fases para distintos valores de α_2, tomando $\alpha_1 = 1$. Vemos que la orientación de las hipérbolas para el par $\{q_1, p_1\}$ son opuestas a las del par $\{q_1, p_1\}$.

Volviendo a la función principal de Hamilton, buscamos su expresión integral a partir de la ec. 35

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\alpha},t) = & -\alpha_1 t + W_1(q_1,\boldsymbol{\alpha}) + W_2(q_2,\boldsymbol{\alpha}) = \\
& -\alpha_1 t \pm \int \sqrt{2\alpha_1 q_1^2 + -\alpha_2 - 1} dq_1 \pm \int \sqrt{2\alpha_1 q_2^2 + \alpha_2 - 1} dq_2
\end{aligned} \tag{38}
$$

Aunque una vez llegados a este punto, no suele ser necesario integrar, ya que es más útil trabajar con sus derivadas. Para hallar la dinámica $q_1(t)$ y $q_2(t)$, encontramos la expresión de β_1 y β_2 en función de q_1 y q_2 a partir de las derivadas propias de la función generatriz S

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_1} = \beta_1 \\
&\longrightarrow \beta_1 = -t \pm \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int_{q_{1,0}}^{q_1} \sqrt{2\alpha_1 q_1^2 - (\alpha_2+1)} dq_1 \pm \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int_{q_{2,0}}^{q_2} \sqrt{2\alpha_1 q_2^2 + (\alpha_2-1)} dq_2 \\
&\qquad = -t \pm \int_{q_{1,0}}^{q_1} \frac{q_1^2}{\sqrt{2\alpha_1 q_1^2 - (\alpha_2+1)}} dq_1 \pm \int_{q_{2,0}}^{q_2} \frac{q_2^2}{\sqrt{2\alpha_1 q_2^2 + (\alpha_2-1)}} dq_2
\end{aligned} \tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_2} = \beta_2 \\
&\longrightarrow \beta_2 = \pm \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{q_{1,0}}^{q_1} \sqrt{2\alpha_1 q_1^2 - (\alpha_2+1)} dq_1 \pm \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{q_{2,0}}^{q_2} \sqrt{2\alpha_1 q_2^2 + (\alpha_2-1)} dq_2 \\
&\qquad = \mp \int_{q_{1,0}}^{q_1} \frac{1}{2\sqrt{2\alpha_1 q_1^2 - (\alpha_2+1)}} dq_1 \pm \int_{q_{2,0}}^{q_2} \frac{1}{2\sqrt{2\alpha_1 q_2^2 + (\alpha_2-1)}} dq_2
\end{aligned} \tag{40}
$$

Lo que quedaría hacer es resolver las integrales y despejar las variables q_1 y q_2 en función de $\beta_1, \alpha_1, \alpha_2$. Particularmente, la ec. 39 nos relaciona a las variables q_i con el tiempo mientras que la ec 40 nos da la relación entre las mismas q_i. Esto último es importante ya que es la ecuación que define la órbita. Normalmente, conviene sacarse de encima el signo $\pm$ y completar después esta información conociendo en qué región del espacio de fases nos encontramos.