

## MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

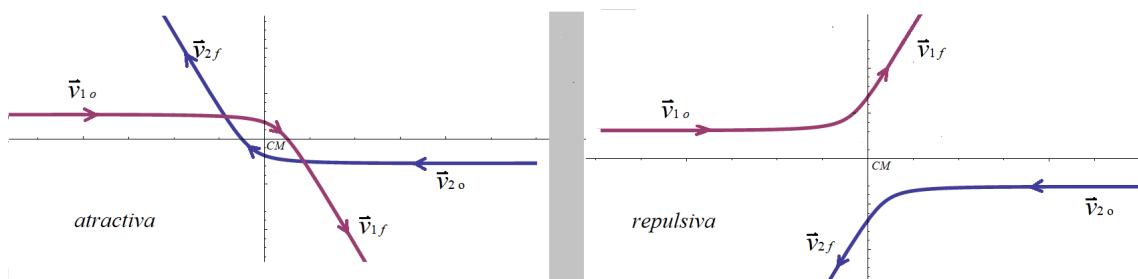
### Clase 10

26 de abril de 2021

### Choque elástico Scattering

## 1 Choque elástico

Si el potencial de interacción en un sistema de dos cuerpos tiende a cero en el infinito, entonces existen órbitas no ligadas donde las partículas están infinitamente separadas tanto en la configuración inicial como en la configuración final:  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \pm \infty$ . En esas configuraciones inicial y final la energía es puramente cinética, pues la energía potencial tiende a cero. Como la energía mecánica se conserva, entonces la energía cinética inicial es igual a la final. Esto es lo mismo que sucede en un choque elástico, aunque en el caso de un choque no se trate de interacciones a distancia. La igualdad entre energía cinética inicial y final junto con la conservación de la cantidad de movimiento total nos permitirán conocer algunos aspectos que tienen en común este tipo de interacciones. La Figura muestra las trayectorias hiperbólicas de dos partículas cargadas iguales en interacción coulombiana –tanto atractiva como repulsiva– tal como se ve en el sistema  $CM$ .



Nótese que las velocidades siempre tendrán direcciones opuestas, como condición necesaria para conservar  $\vec{P} = 0$ . El ángulo entre las direcciones inicial y final depende de los detalles de la interacción; no resulta de los teoremas de conservación.

La anulaci3n de  $\vec{P}$  significa que los valores iniciales y finales de las velocidades en ese sistema  $CM$  cumplen que

$$\vec{v}_{2o} = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{1o} , \quad \vec{v}_{2f} = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{1f}$$

Adem1s se conserva la energ1a cin3tica,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1o}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2o}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Si los valores iniciales son dados, la forma en que los valores finales cumplen estas relaciones es con

$$|\vec{v}_{1f}| = |\vec{v}_{1o}| , \quad |\vec{v}_{2f}| = |\vec{v}_{2o}|$$

Como fue dicho, la direcci3n de las velocidades finales no queda determinada de esta forma, sino que depende de los detalles de la interacci3n. En cuanto a los m3dulos, las velocidades finales tienen los mismos m3dulos que las respectivas velocidades iniciales.

Una propiedad importante del choque el1stico es que el m3dulo de la velocidad relativa antes y despu3s del choque es el mismo. En el sistema  $CM$  el resultado se alcanza en forma muy simple. Debido a que  $\vec{P} = 0$  siempre, entonces

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{v}_1 \quad (1)$$

o tambi3n

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2 - \vec{v}_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{v}_2 \quad (2)$$

Como los m3dulos de  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  no cambian por efecto del choque, lo mismo sucede con  $|\vec{v}_{rel}|$ :

$$|\vec{v}_{rel\ o}| = |\vec{v}_{rel\ f}|$$

A diferencia de las velocidades individuales, que est1n sujetas al teorema de adici3n de velocidades, las velocidades relativas son **invariantes galileanos** (tienen el mismo valor en todos los sistemas de referencia en traslaci3n relativa). Por lo tanto,  $|\vec{v}_{rel\ o}| = |\vec{v}_{rel\ f}|$  es un resultado v1lido en cualquier sistema de referencia inercial.

Usando las ecuaciones (1) y (2) las velocidades finales en el sistema  $CM$  se pueden escribir as1:

$$\vec{v}_{1f} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{rel} \hat{n} , \quad \vec{v}_{2f} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{rel} \hat{n}$$

donde  $\hat{n}$  es el versor que da la direcci3n final a1n desconocida (es la direcci3n de las as1ntotas de salida en la Figura anterior). En t3rminos de las cantidades de movimiento, este resultado dice que  $\vec{p}_{1f} = \mu v_{rel} \hat{n}$ ,  $\vec{p}_{2f} = -\mu v_{rel} \hat{n}$ .

Ahora transformaremos las velocidades finales a un sistema de referencia  $S$  arbitrario. Si  $\vec{V}_{CM}$  es la velocidad del  $CM$  en el sistema de referencia  $S$ , entonces habr1 que sumar  $\vec{V}_{CM}$  al resultado anterior (adici3n galileana de velocidades). Si ahora  $\vec{v}_{1o}$ ,  $\vec{v}_{2o}$  son las velocidades iniciales medidas en  $S$ , entonces

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_{1o} + m_2 \vec{v}_{2o}}{m_1 + m_2}$$

Entonces las velocidades finales en  $S$  son

$$\vec{v}_{1f} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{rel} \hat{n} + \frac{m_1 \vec{v}_{1o} + m_2 \vec{v}_{2o}}{m_1 + m_2}$$

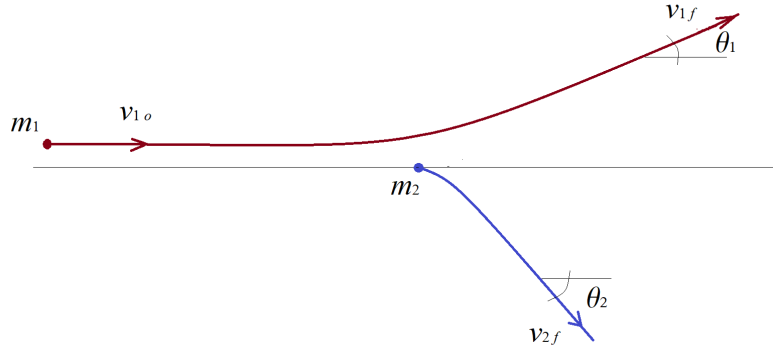
$$\vec{v}_{2f} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{rel} \hat{n} + \frac{m_1 \vec{v}_{1o} + m_2 \vec{v}_{2o}}{m_1 + m_2}$$

Recordemos que el valor de  $v_{rel}$  es el mismo en todos los sistemas de referencia inerciales. Agreguemos que  $\hat{n}$  es la dirección de  $\vec{v}_{rel}$  y tampoco depende del sistema de referencia inercial que se utilice. También es  $\hat{n}$  la dirección final de  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  (como es fácil ver en el sistema  $CM$ ), que también es invariante galileano. Introduciremos el ángulo  $\chi$  para indicar la dirección de  $\hat{n}$ :

$$\hat{n} = \cos \chi \hat{i} + \sin \chi \hat{j}$$

## 1.1 El caso $v_{2o} = 0$

En muchos experimentos, una partícula juega el papel de “proyectil” y la otra de “blanco”. En ese caso es  $\vec{v}_{2o} = 0$  en el sistema del laboratorio, y  $\vec{v}_{rel\ o} = \vec{v}_{1o}$ .



Los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se obtienen de los resultados para las velocidades finales en el sistema del laboratorio:

$$\tan \theta_1 = \frac{v_{1f\ y}}{v_{1f\ x}} = \frac{m_2 v_{1o} \sin \chi}{m_2 v_{1o} \cos \chi + m_1 v_{1o}} = \frac{\sin \chi}{\cos \chi + \frac{m_1}{m_2}}$$

$$\tan \theta_2 = -\frac{v_{2f\ y}}{v_{2f\ x}} = \frac{m_1 v_{1o} \sin \chi}{-m_1 v_{1o} \cos \chi + m_1 v_{1o}} = \frac{\sin \chi}{1 - \cos \chi}$$

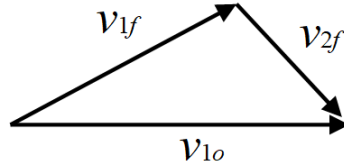
Cuando  $m_1 = m_2$  entonces  $\vec{v}_{2f}$  es perpendicular a  $\vec{v}_{1f}$ . En efecto, podemos valernos de una identidad trigonométrica para obtener

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{1 + \frac{m_1}{m_2}}{-1 + \frac{m_1}{m_2}} \cot \left( \frac{\chi}{2} \right)$$

1) Si  $m_1 = m_2$  entonces  $\tan(\theta_1 + \theta_2)$  diverge. Luego se tiene que  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ . Podemos entender este resultado así: como  $m_1 = m_2$ , la conservación de  $\vec{P}$  queda

$$\vec{v}_{1o} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$

que puede verse como el siguiente triángulo,



mientras que la conservación de  $T$ ,

$$v_{1o}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2,$$

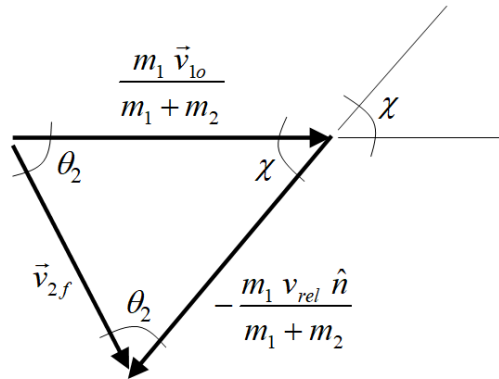
es el teorema de Pitágoras en el triángulo formado por los tres vectores. Por lo tanto  $\vec{v}_{1f} \perp \vec{v}_{2f}$ .

2) Si  $m_1 \geq m_2$  entonces  $\tan(\theta_1 + \theta_2) \geq 0$ . Luego se tiene que  $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi/2$ .

3) El resultado para  $\tan \theta_2$  puede entenderse mejor a partir de la expresión para  $\vec{v}_{2f}$ ; cuando  $\vec{v}_{2o} = 0$  queda así

$$\vec{v}_{2f} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{1o} - v_{rel} \hat{n})$$

donde se ve que  $\vec{v}_{2f}$  resulta de restar dos vectores del mismo módulo ( $v_{rel} = |\vec{v}_{1o}|$  porque  $\vec{v}_{2o} = 0$ ). Entonces se forma el triángulo isósceles que muestra la Figura,



donde vemos que

$$2 \theta_2 + \chi = \pi \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}$$

4) Para una dada relación  $m_1/m_2$ , el ángulo  $\theta_1$  varía con el valor de  $\chi$ , y tiene un máximo si

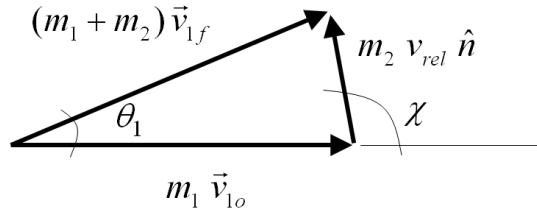
$$0 = \frac{d}{d\chi} \tan \theta_1 = \frac{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \chi}{(\cos \chi + \frac{m_1}{m_2})^2}$$

Entonces  $\theta_1$  es máximo cuando  $\cos \chi = -m_2/m_1$ . Vemos que debe ser  $m_1 > m_2$ ; en caso contrario el proyectil puede salir en cualquier dirección. Reemplazando este valor de  $\chi$  se obtiene que (ejercicio)

$$\sin \theta_{1 \max} = \frac{m_2}{m_1} \quad (3)$$

Este resultado puede entenderse mejor a partir de la expresión para  $\vec{v}_{1f}$ ; cuando  $\vec{v}_{2o} = 0$  queda así

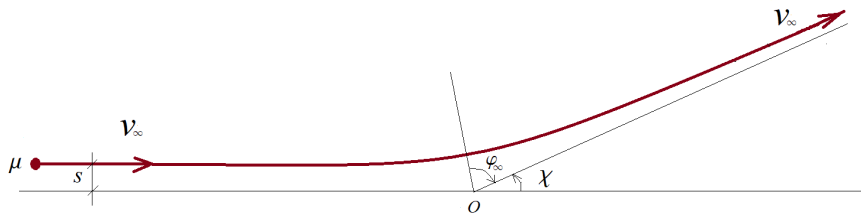
$$(m_1 + m_2) \vec{v}_{1f} = m_2 v_{rel} \hat{n} + m_1 \vec{v}_{1o}$$



Como  $v_{rel} = |\vec{v}_{1o}|$  es fijo, lo único que podemos hacer para incrementar  $\theta_1$  es elegir  $\chi$  para que se forme un triángulo rectángulo. Como la relación entre cateto opuesto e hipotenusa es  $m_2/m_1$  llegamos al resultado (3). En cambio, si  $m_2 > m_1$ , el ángulo  $\theta_1$  podrá tomar cualquier valor entre 0 y  $\pi$ .

## 2 Scattering

Hasta aquí hemos visto las consecuencias de los teoremas de conservación para la evolución no ligada de un sistema de dos cuerpos. Ahora veremos cómo una interacción específica determina el ángulo  $\chi$  en función de los datos iniciales. Sabemos que el problema de dos cuerpos se resuelve estudiando una partícula de masa  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  (la masa reducida) en una posición  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  respecto del centro de un potencial central. Conocemos la solución en función de las primeras integrales  $\ell$  y  $E$ . Pero será conveniente escribir la solución en términos de la velocidad  $v_\infty$  de  $\mu$  en el infinito, y el parámetro de impacto  $s$ :



Entonces

$$E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2, \quad \ell = \mu s v_\infty \quad (4)$$

En la Figura indicamos también el ángulo  $\chi$ , que es la dirección final del vector  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$ .

Como este tipo de experimento se suele realizar con haces de partículas que son lanzadas hacia un centro dispersor (*scatter* significa *dispersar* o *esparcir*), lo que interesa conocer es qué fracción de los proyectiles se dispersa con ángulos comprendidos entre  $\theta_1$  y  $\theta_1 + d\theta_1$ . En términos del problema equivalente con la partícula  $\mu$ , averiguaremos cuántas de estas partículas son dispersadas con ángulos comprendidos entre  $\chi$  y  $\chi + d\chi$ ; y luego usaremos la relación entre  $\theta_1$  y  $\chi$  ya obtenida para responder la cuestión al nivel del problema dos cuerpos.

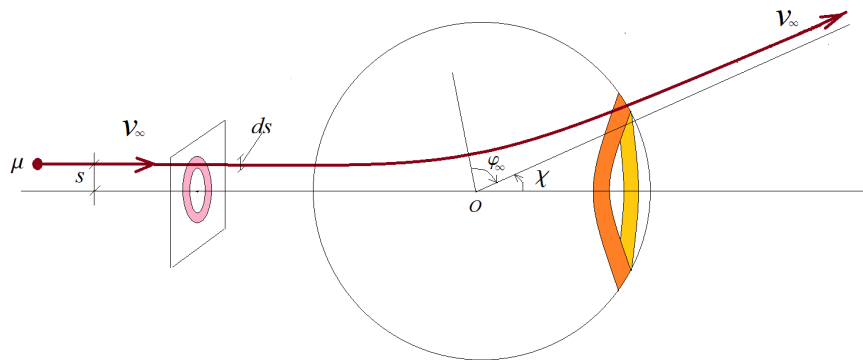
El número  $dN$  de partículas que emergen por unidad de tiempo con ángulos comprendidos entre  $\chi$  y  $\chi + d\chi$  contiene la información sobre el potencial dispersor. Como  $dN$  es proporcional a la intensidad del haz (supuesta uniforme) conviene caracterizar el potencial dispersor mediante el cociente entre  $dN$  y la intensidad. Entonces llamaremos

**Intensidad  $I$ :** número de partículas por unidad de tiempo y de superficie atravesada en el haz de entrada.

**Sección eficaz de scattering:**

$$d\sigma \equiv \frac{dN}{I}$$

$d\sigma$  tiene unidades de superficie. Es igual al área infinitesimal en la sección del haz por donde entraron las  $dN$  partículas que luego se dispersaron con ángulos comprendidos entre  $\chi$  y  $\chi + d\chi$  (ver Figura).



En efecto por el anillo en el haz de entrada pasan  $2\pi s ds I$  partículas. Y estas partículas salen luego con ángulos comprendidos entre  $\chi$  y  $\chi + d\chi$ . Por supuesto, la cuestión implica conocer la relación entre  $s$  y  $\chi$ ; esta relación depende del potencial de interacción. En síntesis,

$$d\sigma = \frac{dN}{I} = \frac{2\pi s ds I}{I} = 2\pi s ds = 2\pi s(\chi) \left| \frac{ds}{d\chi} \right| d\chi$$

Más adelante calcularemos la función  $s(\chi)$  para el potencial coulombiano. La razón para utilizar el valor absoluto de  $ds/d\chi$  es que esta derivada puede ser negativa; en efecto  $s(\chi)$  es decreciente para el potencial coulombiano repulsivo.

Es común formular la sección eficaz no en términos del ángulo  $\chi$  sino del ángulo sólido abarcado entre  $\chi$  y  $\chi + d\chi$ ,

$$d\Omega = 2\pi \sin |\chi| d\chi ,$$

es decir

$$d\sigma = \frac{s(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{ds}{d\chi} \right| d\Omega$$

## 2.1 Potencial coulombiano

En el caso del potencial coulombiano  $V(r) = -\alpha/r$  (atractivo o repulsivo:  $\alpha > 0$  o  $\alpha < 0$ ) habíamos obtenido (el signo superior corresponde al caso atractivo)

$$\pm \frac{\ell^2}{\mu |\alpha|} \frac{1}{r} = 1 \pm e \cos \varphi, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2 \ell^2 E}{\alpha^2 \mu}} = \sqrt{1 + \left( \frac{\mu s v_\infty^2}{\alpha} \right)^2}$$

donde  $\varphi$  se mide desde  $r_{\min}$ . Como vemos en las figuras anteriores, el ángulo  $\varphi_\infty$ , que corresponde a  $r \rightarrow \infty$ , se relaciona con  $\chi$  según<sup>1</sup>

$$2 \varphi_\infty + \chi = \pi$$

Por otro lado, de la ecuación de la cónica se obtiene que

$$\cos \varphi_\infty = \mp \frac{1}{e} = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\mu s v_\infty^2}{\alpha} \right)^2}}$$

La expresión entre paréntesis corresponde a  $\tan \varphi_\infty$ . Tanto en el caso atractivo como en el repulsivo es

$$-\frac{\mu s v_\infty^2}{\alpha} = \tan \varphi_\infty = \tan \frac{\pi - \chi}{2} = \cot \frac{\chi}{2}$$

Entonces

$$s(\chi) = -\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \cot \frac{\chi}{2}$$

Por lo tanto

$$\frac{ds}{d\chi} = \frac{\alpha}{2 \mu v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}}$$

Reemplazando en la sección eficaz ( $\chi$  es negativo cuando  $\alpha$  es positivo)

$$d\sigma = 2\pi s(\chi) \left| \frac{ds}{d\chi} \right| d\chi = \pi \left( \frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cot \frac{|\chi|}{2}}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} d\chi = \pi \left( \frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{|\chi|}{2}} d\chi$$

o bien como  $d\Omega = 2\pi \sin |\chi| d\chi$

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{|\chi|}{2}} \frac{d\Omega}{\sin |\chi|}$$

Si escribimos  $\sin \chi = \sin(\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{2}) = 2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2}$ , entonces llegamos a la **fórmula de Rutherford** para la sección eficaz de la interacción coulombiana:

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2 \mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} d\Omega$$

Para conocer la sección eficaz de proyectiles y blancos, usaremos las relaciones

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \chi}{\cos \chi + \frac{m_1}{m_2}}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}$$

<sup>1</sup>La fórmula vale también para la trayectoria atractiva, donde  $\chi < 0$  (ver Figura 1).

para escribir  $\chi(\theta_1)$  y  $d\chi = (d\chi/d\theta_1) d\theta_1$ , y lo mismo para  $\theta_2$ . Cuando proyectiles y blancos son iguales no tiene sentido distinguirlos después de la dispersión, y deberían sumarse las secciones eficaces respectivas (teniendo en cuenta que si  $m_1 = m_2$  es  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ ). Por otro lado, la interacción entre los proyectiles dentro del haz ha sido ignorada en este tratamiento.

En 1909 E. Rutherford colaboró con Geiger y Marsden en un experimento de dispersión de un haz de partículas alfa (núcleos de  ${}^4\text{He}$ ) que atravesaba una lámina de oro. La forma en que las partículas alfa eran dispersadas (algunas con ángulo de deflexión muy grande) indicaban que en la materia existían regiones de carga positiva muy concentrada. Esto le permitió enunciar en 1911 lo que conocemos como el modelo atómico de Rutherford, donde la carga de un signo se concentra en un núcleo que contiene casi toda la masa del átomo, y la carga de signo opuesto se distribuye en electrones de baja masa que orbitan alrededor del núcleo.

Como la masa del núcleo de oro es mucho mayor que la masa de la partícula alfa ( $m_2 \gg m_1$ ), entonces  $\theta_1 \simeq \chi$ , y la fórmula de Rutherford se aplica directamente a la sección eficaz de dispersión de las partículas alfa.

Nótese que la sección eficaz total del potencial Coulombiano diverge:

$$\sigma = \int d\sigma = \pi \left( \frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi = \infty$$

En efecto,  $\sigma$  corresponde al área de la sección del haz por donde entran las partículas que serán dispersadas. La sección total es infinita porque el potencial de Coulomb dispersa aun aquellos proyectiles cuyo parámetro de impacto tiende a infinito.