Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

**MECÁNICA CLÁSICA**

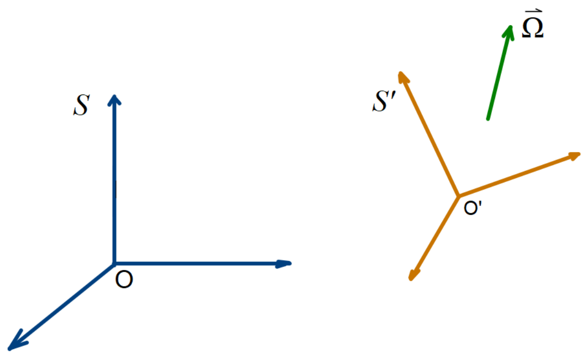
**Profesor: Rafael Ferraro**

**Clase 1**
22 de marzo de 2021

**Introducción**
**Repaso de Física 1**

# 1 Teorema de la derivada relativa

Consideremos dos sistemas de referencia $S$ y $S'$ en movimiento relativo. Si la *orientación* de $S'$ relativa a $S$ cambia con el tiempo, entonces $S'$ *rota* respecto de $S$. Llamaremos $\vec{\Omega}$ a la velocidad de rotación de $S'$ respecto de $S$.




Queremos derivar un vector $\vec{A}(t)$ desde el sistema $S$. Es posible descomponer a $\vec{A}$ respecto de las bases de $S$ y $S'$ :

$$\begin{aligned}\vec{A}(t) &= A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k} \\ &= A_x'\,\hat{\imath}\,' + A_y'\,\hat{\jmath}\,' + A_z'\,\hat{k}\,'\end{aligned}$$

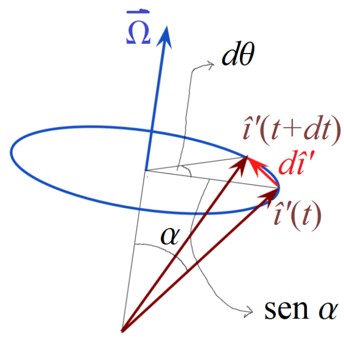
¿Cuál es la diferencia entre derivar $\vec{A}$ desde el sistema $S$ o hacerlo desde $S'$? Si derivamos desde $S$ entonces los versores $\hat{\imath},\ \hat{\jmath},\ \hat{k}$ se ven fijos (constantes en el tiempo); el resultado es

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_S = \frac{dA_x}{dt}\ \hat{\imath} + \frac{dA_y}{dt}\ \hat{\jmath} + \frac{dA_z}{dt}\ \hat{k}$$

Pero también podríamos derivar desde $S$ usando la otra descomposición de $\vec{A}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}}{dt}|_S \quad &= \quad \frac{dA'_x}{dt}\ \hat{\imath}' + \frac{dA'_y}{dt}\ \hat{\jmath}' + \frac{dA'_z}{dt}\ \hat{k}' \\ &\quad + A'_x\ \frac{d\ \hat{\imath}'}{dt}|_S\ + A'_y\ \frac{d\ \hat{\jmath}'}{dt}|_S\ + A'_z\ \frac{d\ \hat{k}'}{dt}|_S\end{aligned}$$

En este caso debemos calcular las derivadas de los versores del sistema $S'$vistos desde $S$. Veámoslo en una Figura,




$$|d\hat{\imath}'| = \sin\alpha\ d\theta = \sin\alpha\ \Omega\ dt$$

Si además notamos que la dirección de $d\hat{\imath}\,'$ coincide con la de $\vec{\Omega}\times\hat{\imath}\,'$, concluimos que

$$\frac{d\hat{\imath}'}{dt}|_S = \vec{\Omega}\times\hat{\imath}'$$

y lo mismo para los otros versores. Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}}{dt}|_S \quad &= \quad \frac{dA'_x}{dt}\ \hat{\imath}' + \frac{dA'_y}{dt}\ \hat{\jmath}' + \frac{dA'_z}{dt}\ \hat{k}' \\ &\quad + A'_x\ \vec{\Omega}\times\hat{\imath}'\ + A'_y\ \vec{\Omega}\times\hat{\jmath}'\ + A'_z\ \vec{\Omega}\times\hat{k}'\end{aligned}$$

Como la primera línea no es otra cosa que derivar $\vec{A}$ desde $S'$, concluimos que

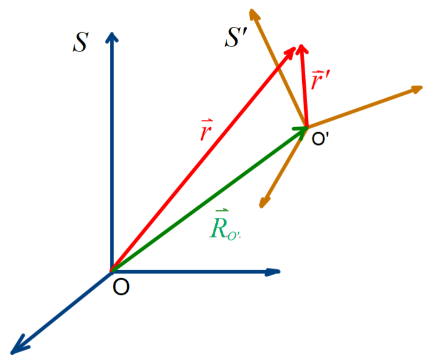
$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt}|_S = \frac{d\vec{A}}{dt}|_{S'}\ +\ \vec{\Omega}\times\vec{A}}$$

que es el teorema de la derivada relativa.

## 1.1 Ejemplos

En el resultado anterior $\vec{A}$ es un vector arbitrario. Veremos algunos casos de interés.

Sea $\vec{A} = \vec{r}\,'$ la posición de un punto o partícula respecto del origen de $S'$.




Se cumple que

$$\vec{A} = \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}_{O'}$$

donde $\vec{R}_{O'}$ es la posición del origen $O'$ de $S'$ respecto del origen $O$ de $S$. Entonces, reemplazando en el teorema:

$$\frac{d(\vec{r} - \vec{R}_{O'})}{dt}|_S = \frac{d\,\vec{r}\,'}{dt}|_{S'} \;+\; \vec{\Omega} \times \vec{r}\,'$$

Entonces

$$\vec{v} - \vec{V}_{O'} = \vec{v}\,' + \;\vec{\Omega} \times \vec{r}\,'$$

donde $\vec{v}$, $\vec{v}\,'$ son las velocidades del punto o partícula respecto de cada sistema de referencia. Veamos dos casos particulares de este resultado:

1) Si $\vec{\Omega} = 0$ (es decir, si $S'$ se *traslada* respecto de $S$) entonces resulta el teorema de adición de velocidades de Galileo: $\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V}$.

2) Pensemos a $S'$ como un cuerpo rígido cuyo movimiento es observado desde $S$, y sea $\vec{v}$ la velocidad de un punto $P$ perteneciente al cuerpo rígido (entonces $\vec{v}\,' = 0$). Ubiquemos el origen $O'$ en un punto $Q$ cualquiera del cuerpo rígido ($\vec{r}\,'_P = \vec{r}_P - \vec{r}_Q$). Entonces obtenemos

$$\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \;\vec{\Omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)$$

que no es otra cosa que la cinemática del cuerpo rígido.

Volviendo a derivar el resultado obtenido más arriba,

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{V}_{O'})|_S = \frac{d\vec{v}\,'}{dt}|_S + \;\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt}|_S$$

En el miembro de la derecha aplicamos el teorema de la derivada relativa para obtener

$$\vec{a} - \vec{A}_{O'} = \vec{a}\,' + \vec{\Omega} \times \vec{v}\,' + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\Omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\Omega} \times \vec{r}\,')$$

Es decir,

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{A}_{O'} + 2\,\vec{\Omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,') + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}\,'$$

donde reconocemos los términos que van a dar lugar a las fuerzas de inercia en la Dinámica.

# 2 Cantidad de movimiento de un sistema de $N$ partículas

$$\vec{P} \doteq \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

donde $\vec{F}_i$ es la fuerza *resultante* sobre la $i$-ésima partícula. Podemos descomponerla en la suma de la resultante de las fuerzas externas, $\vec{F}_i^{ext}$, y la resultante de las fuerzas internas

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$$

donde $\vec{f}_{ij}$ es la fuerza (interna) sobre $i$ debida a $j$. Ahora bien, en la última sumatoria aparece

$$(\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \,...) + (\vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \,...) + ...$$

Pero $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ por la 3ra. ley de Newton (principio de acción y reacción). Entonces la suma de fuerzas internas del sistema es nula:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext}}$$

$\vec{P}$ se conserva si y sólo si la resultante de fuerzas externas es cero.

## 2.1 Centro de masa

Notemos que

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i$$

Entonces resulta útil definir una posición $\vec{R}_{CM}$ característica del sistema, tal que

$$M\,\vec{R}_{CM} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i$$

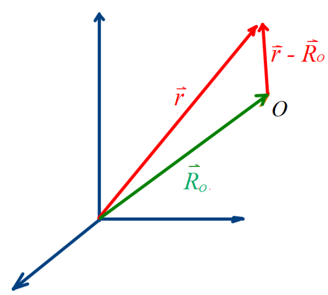
donde $M$ es la masa total del sistema ($M = \sum m_i$). Como vemos, es un promedio pesado de las posiciones de las partículas que forman el sistema. Llamaremos a $\vec{R}_{CM}$ posición del *centro de masa* del sistema de partículas. La definición hace posible ver a $\vec{P}$ como la cantidad de movimiento de una única partícula de masa $M$ que se mueve con velocidad $\vec{V}_{CM} = \dot{\vec{R}}_{CM}$ :

$$\vec{P} = M\ \vec{V}_{CM}$$

La conservación de $\vec{P}$ implica que la velocidad del centro de masa es constante.

# 3 Momento angular de un sistema de $N$ partículas

$$\vec{L}_O \ \doteq\ \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_{O\ i} \ =\ \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}_O) \times \vec{p}_i$$



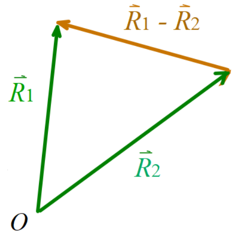

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} \left[ \frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{R}_O) \times \vec{p}_i + (\vec{r}_i - \vec{R}_O) \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] \\
&= -\ \frac{d\vec{R}_O}{dt} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}_O) \times \vec{F}_i \\
&= -\vec{V}_O \times \vec{P}\ +\ \sum_{i=1}^{N} \vec{N}_{O\ i}
\end{aligned}$$

donde $\vec{N}_{O\ i}$ es la resultante de los momentos de las fuerzas (torques) sobre la partícula $i$. Podemos preguntarnos si los momentos de todas las fuerzas internas se cancelan de a pares debido al principio de acción y reacción. Veamos esta cuestión:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{N}^{int}_{O\ i} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{R}_i \times \vec{f}_{ij}$$

donde $\vec{R}_i \equiv \vec{r}_i - \vec{R}_O$. En la doble sumatoria aparecen los términos

$$\vec{R}_1 \times \vec{f}_{12}\ +\ \vec{R}_2 \times \vec{f}_{21}\ +\ ...\ = (\vec{R}_1 -\ \vec{R}_2) \times \vec{f}_{12}\ \ +\ ...$$




Vemos que la cancelación de a pares se produce sólo si

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = (\vec{R}_i - \vec{R}_j) \ \ || \ \ \vec{f}_{ij} \qquad \forall\ i, j$$

es decir, cuando las fuerzas de interacción entre las partículas del sistema están dirigidas a lo largo de la recta que une las partículas. En ese caso el resultado anterior queda

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{V}_O \times \vec{P} \ + \sum_{i=1}^{N} \vec{N}_{O\ i}^{ext}}$$

Notemos que el término $\vec{V}_O \times \vec{P}$ se anula en dos casos sencillos: i) si $O$ es fijo, ii) si $O$ es el $CM$. En cualquiera de esos dos casos vale que $\vec{L}_O$ se conserva si y sólo si se anula la suma de los torques externos respecto de $O$ (en la hipótesis que $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \ \ || \ \ \vec{f}_{ij} \quad \forall\ i, j$ ).

La magnitud $\vec{L}_O$ depende de la elección del centro de momentos $O$, por un lado, y de la elección del sistema de referencia por el otro (porque la elección del sistema de referencia determina los valores de las velocidades $\vec{v}_i$). Veamos cómo cambia $\vec{L}_O$ ante el cambio de alguno de estos dos factores.

## 3.1 Cambio del centro de momentos

Cambiaremos el centro de momento sin cambiar de sistema de referencia:

$$\vec{L}_{O'} - \vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}_{O'}) \times \vec{p}_i - \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}_O) \times \vec{p}_i = -(\vec{R}_{O'} - \vec{R}_O) \times \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

Entonces

$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O - (\vec{R}_{O'} - \vec{R}_O) \times \vec{P}$$

Cuando $\vec{P} = 0$ (es decir, en el sistema $CM$) el momento angular del sistema no depende del centro de momentos (resultado típico de todo momento).

Ahora veamos qué sucede si cambiamos el sistema de referencia manteniendo el mismo centro de momentos $O$. Supondremos dos sistemas de referencia $S$ y $S'$ que **no están en rotación relativa**, de manera que vale la adición de velocidades galileana: $\vec{v}_i{}' = \vec{v}_i - \vec{V}$, donde $\vec{V}$ es la velocidad de $S'$ relativa a $S$.

$$\begin{aligned}
\vec{L}'_O - \vec{L}_O &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}_O) \times \vec{p}_i{}' - \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}_O) \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}_O) \times (\vec{p}_i{}' - \vec{p}_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}_O) \times m_i \vec{V} = -\sum_{i=1}^{N} m_i \; \vec{r}_i \times \vec{V} + \vec{R}_O \times \vec{V} \; \sum_{i=1}^{N} m_i \\
&= -\vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + \vec{R}_O \times M\vec{V} \; = (\vec{R}_O - \vec{R}_{CM}) \times M\vec{V}
\end{aligned}$$

Tenemos aquí algunos casos particulares interesantes:

1) Eligiendo $O \equiv CM$ obtenemos

$$\vec{L}'_{CM} = \vec{L}_{CM}$$

El momento angular respecto del $CM$ tiene el mismo valor en distintos sistemas de referencia en traslación relativa.

2) Eligiendo $S'$ como el sistema $CM$ (donde, como dijimos, el valor del momento angular no depende del centro de momentos), tendremos $\vec{V} = \vec{V}_{CM}$; entonces obtenemos

$$\vec{L}_O = \vec{L}^{CM} + (\vec{R}_{CM} - \vec{R}_O) \times M\vec{V}_{CM} \; = \vec{L}^{CM} + \vec{R}_{CM-O} \times \vec{P}$$

Este resultado dice que el momento angular de un sistema de partículas puede descomponerse en el momento angular de una única partícula de cantidad de movimiento $\vec{P}$ ubicada en el $CM$ (**momento angular orbital**) más el momento angular medido en un sistema $CM$ que se traslada respecto de $S$ (**momento angular intrínseco o spin**).

# 4 Transformación de la energía cinética

Consideremos nuevamente dos sistemas de referencia en traslación relativa, de manera que vale la adición galileana de velocidades $\vec{v}_i{}' = \vec{v}_i - \vec{V}$. La energía cinética en el sistema $S'$ es

$$\begin{aligned}
T\,' &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \, m_i \; v_i'^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \, m_i \; (\vec{v}_i - \vec{V}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \, m_i \; v_i{}^2 - \sum_{i=1}^{N} m_i \; \vec{v}_i \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \; V^2 \\
&= T \; - \; M \; \vec{V}_{CM} \cdot \vec{V} \; + \; \frac{1}{2} \; M \; V^2
\end{aligned}$$

Si el sistema $S'$ es el sistema $CM$, entonces $\vec{V} = \vec{V}_{CM}$ y obtenemos

$$T = \frac{1}{2} \; M \; V_{CM}^2 \; + \; T^{CM}$$

La energía cinética de un sistema de partículas puede descomponerse en la energía cinética de una única partícula de masa $M$ moviéndose con velocidad $V_{CM}$ más la energía cinética medida en un sistema $CM$ que se traslada respecto de $S$.