

## MECÁNICA CLÁSICA

**Profesor: Rafael Ferraro**

### Clase 12

3 de mayo de 2021

**Pequeñas oscilaciones (2da. parte)  
Oscilador forzado**

## 1 Notación matricial

El formalismo de pequeñas oscilaciones se resume en tres matrices de  $n \times n$ :

- 1) La matriz  $\mathbf{M}$  de componentes  $m_{\mu\nu}$
- 2) La matriz  $\mathbf{K}$  de componentes  $k_{\mu\nu}$
- 3) La matriz  $\mathbf{A}$  de componentes  $A_{\nu s} \equiv A_{\nu}^{(s)}$  (cada columna representa un modo normal).

Con ayuda de las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ , las  $n \times n$  ecuaciones

$$\sum_{\nu=1}^n (-\omega_s^2 m_{\mu\nu} + k_{\mu\nu}) A_{\nu}^{(s)} = 0, \quad \mu = 1, \dots, n; \quad s = 1, \dots, n$$

se resumen en una única ecuación matricial:

$$\mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{K} \mathbf{A} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{\Omega}^2$  es una matriz diagonal formada por los cuadrados de las frecuencias propias:  $\Omega_{ts}^2 = \omega_s^2 \delta_{ts}$  o bien

$$\mathbf{\Omega}^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$$

Si multiplicamos por la traspuesta de  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}$$

Por otro lado, hemos visto que la relación de ortonormalidad significa que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{1} \quad (2)$$

Entonces

$$\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \quad (3)$$

La matriz  $\mathbf{A}$  a la vez diagonaliza  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$ .

## 2 Coordenadas normales

Las coordenadas  $\eta_\nu$  podrían no ser las más adecuadas para el sistema físico en consideración. Organicemos las  $\eta_\nu$ 's en una columna que llamaremos  $|\eta\rangle$ ,

$$|\eta\rangle = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

para escribir las ecuaciones de movimiento,

$$\sum_{\nu=1}^n (m_{\mu\nu} \ddot{\eta}_\nu + k_{\mu\nu} \eta_\nu) = 0, \quad \mu = 1, \dots, n,$$

en notación matricial:

$$\mathbf{M} |\ddot{\eta}\rangle + \mathbf{K} |\eta\rangle = 0$$

A la luz de las relaciones matriciales anteriores, esta ecuación sugiere introducir **coordenadas normales**  $\xi_s$  definidas mediante la siguiente transformación:

$$|\eta\rangle = \mathbf{A} |\xi\rangle \quad (4)$$

En efecto, reemplazando en las ecuaciones de movimiento resulta:

$$\mathbf{M} \mathbf{A} |\ddot{\xi}\rangle + \mathbf{K} \mathbf{A} |\xi\rangle = 0$$

Multiplicando a izquierda por  $\mathbf{A}^T$ , y usando las ecuaciones (2) y (3),

$$|\ddot{\xi}\rangle + \mathbf{\Omega}^2 |\xi\rangle = 0$$

que significa

$$\ddot{\xi}_s + \omega_s^2 \xi_s = 0, \quad s = 1, \dots, n \quad (5)$$

Vemos que el conjunto de ecuaciones de movimiento luce ahora como un conjunto de osciladores armónicos desacoplados, cada uno de ellos correspondiendo a cada una de las frecuencias propias del sistema. En el modo normal  $s$  sólo la coordenada  $\xi_s$  oscila; las demás coordenadas permanecen iguales a cero.

El desacople puede verificarse también en el Lagrangiano. Si llamamos  $\langle \eta|$  a la fila formada por las  $\eta_\nu$ 's ( $\langle \eta| = |\eta\rangle^T = \langle \xi| \mathbf{A}^T$ ), el Lagrangiano linealizado se escribe

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \langle \dot{\eta}| \mathbf{M} |\dot{\eta}\rangle - \frac{1}{2} \langle \eta| \mathbf{K} |\eta\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \dot{\xi}| \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} |\dot{\xi}\rangle - \frac{1}{2} \langle \xi| \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} |\xi\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \dot{\xi}|\dot{\xi}\rangle - \frac{1}{2} \langle \xi| \mathbf{\Omega}^2 |\xi\rangle = \sum_{s=1}^n \frac{1}{2} (\dot{\xi}_s^2 - \omega_s^2 \xi_s^2) \end{aligned}$$

Vemos que las coordenadas normales permiten que el Lagrangiano del sistema se muestre como una suma de  $n$  osciladores armónicos desacoplados, cada uno con su frecuencia propia  $\omega_s$ . En otras palabras, al diagonalizar  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$  (las matrices que representan las energías cinéticas y potencial) la matriz  $\mathbf{A}$  está señalando las direcciones privilegiadas en el espacio de configuración respecto de las cuales la descripción del movimiento es más simple.

La solución de las ecuaciones (5) es

$$\xi_s(t) = C^{(s)} e^{i\omega_s t} ;$$

reemplazando en la solución general (ver ecuación (4) de la clase anterior),

$$\eta_\nu(t) = \sum_{s=1}^n A_\nu^{(s)} \xi_s(t) , \quad \nu = 1, \dots, n$$

que no es más que la ecuación (4), ahora escrita para la evolución temporal del sistema.

Si se desea obtener las coordenadas normales a partir de las coordenadas originales, usaremos la relación de ortonormalidad para invertir la ecuación (4):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} |\eta\rangle = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} |\xi\rangle = |\xi\rangle$$

En particular, para dados valores iniciales de  $|\eta\rangle$  y  $|\dot{\eta}\rangle$  tendremos los respectivos valores de  $C^{(s)}$

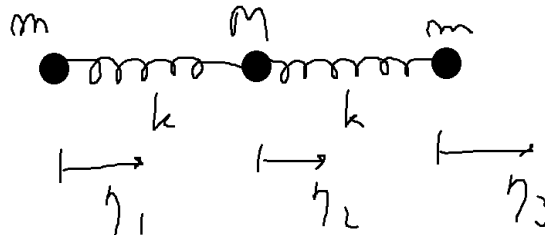
$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{M} |\eta_o\rangle &= |\xi_o\rangle = |\mathbf{C}\rangle \\ \mathbf{A}^T \mathbf{M} |\dot{\eta}_o\rangle &= |\dot{\xi}_o\rangle = |i\omega \mathbf{C}\rangle = i\boldsymbol{\Omega} |\mathbf{C}\rangle \end{aligned}$$

Como finalmente nos interesa la parte real de la solución  $|\eta(t)\rangle$ , tomaremos parte real en las anteriores ecuaciones,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{M} \operatorname{Re} |\eta_o\rangle &= \operatorname{Re} |\mathbf{C}\rangle \\ -\boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M} \operatorname{Re} |\dot{\eta}_o\rangle &= \operatorname{Im} |\mathbf{C}\rangle \end{aligned}$$

de donde resultan los valores de los complejos  $C^{(s)}$  que se precisan para satisfacer las condiciones iniciales de la solución real.

## 2.1 Ejemplo: la molécula de CO<sub>2</sub>



$$L = \frac{1}{2} m \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{\eta}_3^2 - \frac{1}{2} k (\eta_2 - \eta_1)^2 - \frac{1}{2} k (\eta_3 - \eta_2)^2$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix},$$

Las frecuencias propias resultan

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{M} + \frac{k}{m}}$$

El resultado  $\omega_1 = 0$  puede sorprendernos (habíamos dicho que todos los  $\omega^2$  eran positivos). Sin embargo el punto de equilibrio  $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2 = \bar{\eta}_3 = 0$  no es estrictamente un mínimo de potencial. Nótese que el potencial no cambia ante traslaciones  $\Delta\eta_1 = \Delta\eta_2 = \Delta\eta_3$ . Este modo traslatorio podría eliminarse trabajando en el sistema  $CM$ . Asimismo, en un movimiento tri-dimensional convendría eliminar también el modo rotatorio, en el que la molécula rota como un rígido.

El siguiente paso es construir la ecuación (1) para resolver los  $A_\nu^{(s)}$ ; el resultado es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_1^{(3)} \\ A_1^{(1)} & 0 & -\frac{2m}{M}A_1^{(3)} \\ A_1^{(1)} & -A_1^{(2)} & A_1^{(3)} \end{pmatrix}$$

y la normalización da

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \sqrt{\frac{M}{2m(2m+M)}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & 0 & -\sqrt{\frac{2m}{M(2m+M)}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \sqrt{\frac{M}{2m(2m+M)}} \end{pmatrix}$$

Las coordenadas normales son

$$|\xi\rangle = \mathbf{A}^T \mathbf{M} |\eta\rangle = \begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{2m+M}} & \frac{M}{\sqrt{2m+M}} & \frac{m}{\sqrt{2m+M}} \\ \sqrt{\frac{m}{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{m}{2}} \\ \sqrt{\frac{mM}{2(2m+M)}} & -\sqrt{\frac{2mM}{2m+M}} & \sqrt{\frac{mM}{2(2m+M)}} \end{pmatrix} |\eta\rangle$$

es decir,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2m+M}} (m \eta_1 + M \eta_2 + m \eta_3) \\ \xi_2 &= \sqrt{\frac{m}{2}} (\eta_1 - \eta_3) \\ \xi_3 &= \sqrt{\frac{mM}{2(2m+M)}} (\eta_1 - 2 \eta_2 + \eta_3) \end{aligned}$$

Modo normal 1 ( $\xi_2 = 0 = \xi_3$ ):  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$  (traslación)

Modo normal 2 ( $\xi_1 = 0 = \xi_3$ ):  $\eta_2 = 0$ ,  $\eta_1 = -\eta_3$

Modo normal 3 ( $\xi_1 = 0 = \xi_2$ ):  $\eta_1 = -\frac{M}{2m} \eta_2 = \eta_3$

Por supuesto la forma de los modos normales de oscilación ya era visible en el primer resultado para la matriz  $\mathbf{A}$ , que contenía las amplitudes relativas de cada modo.

### 3 Oscilador forzado

El oscilador forzado está sometido a la fuerza elástica  $\vec{F}_{elast} = -kx \hat{i}$ , una fuerza de rozamiento viscoso  $\vec{F}_{visc} = -r\dot{x} \hat{i}$ , y una fuerza externa  $\vec{F}_{ext} = F_o \cos \omega t \hat{i}$ . La ecuación de movimiento es

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m} \operatorname{Re}[e^{i\omega t}] , \quad (6)$$

donde  $\omega_o^2 = k/m$ ,  $\gamma = r/m$ . Como es una ecuación lineal inhomogénea, la solución general es la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

La solución homogénea es amortiguada, debido a la disipación producida por el rozamiento viscoso. Se propone la forma general  $x_h(t) \propto e^{\lambda t}$ , y se obtiene una ecuación cuadrática para  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_o^2 = 0$$

Entonces las dos raíces (que darán dos soluciones homogéneas independientes) son

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_o^2}$$

El segundo término puede ser real o imaginario. Si es real resulta  $\lambda_{1,2} < 0$ , lo que significa que la solución se amortigua. Si el segundo término es imaginario, la solución oscila con la frecuencia  $\sqrt{\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$  mientras se amortigua con el factor  $e^{-\gamma t/2}$  (movimiento subamortiguado).<sup>1</sup> En ambos casos la solución homogénea se extingue a tiempos largos:

$$x_h(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

A tiempos largos sólo sobrevive la solución particular. Como los coeficientes de la ecuación de movimiento son reales, podremos buscar una solución particular compleja para la ecuación

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m} e^{i\omega t} ;$$

de esa forma la parte real de la solución particular será solución de la ecuación (6). Proponemos la solución compleja

$$x_p(t) = A e^{i\omega t} ,$$

donde  $A \in \mathbb{C}$ . Reemplazando en la ecuación,

$$-\omega^2 A + i \gamma \omega A + \omega_o^2 A = \frac{F_o}{m}$$

Entonces<sup>2</sup>

$$A = \frac{\frac{F_o}{m}}{\omega_o^2 - \omega^2 + i \gamma \omega}$$

<sup>1</sup>Si  $\omega_o = \gamma/2$ , entonces las dos raíces son iguales:  $\lambda = -\gamma/2$ . En ese caso la segunda solución independiente tiene la forma  $t e^{-\gamma t/2}$ . Este caso se denomina amortiguamiento crítico.

<sup>2</sup>Si  $\gamma = 0$  y  $\omega = \omega_o$ , entonces  $x_p(t) = F_o t / (2m\omega_o) \sin[\omega_o t]$ .

Escribamos el complejo  $A$  en la forma  $|A| e^{i\delta}$  para separar amplitud y fase. Por un lado es

$$|A| = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

Por otro lado, multiplicando y dividiendo  $A$  por el conjugado del denominador resulta

$$A = \frac{\frac{F_o}{m}}{|\omega_o^2 - \omega^2 + i \gamma \omega|^2} (\omega_o^2 - \omega^2 - i \gamma \omega)$$

En la expresión para  $A$  vemos que  $\text{Im}[A] < 0$ . Además, si  $\omega \leq \omega_o$  entonces  $\text{Re}[A] \geq 0$ . Esto significa que la fase de  $A$  está en el cuarto cuadrante si  $\omega < \omega_o$ , y pertenece al tercer cuadrante si  $\omega > \omega_o$ . En cualquier caso el movimiento atrasa respecto de la fuerza externa. La fase  $\delta$  cumple que

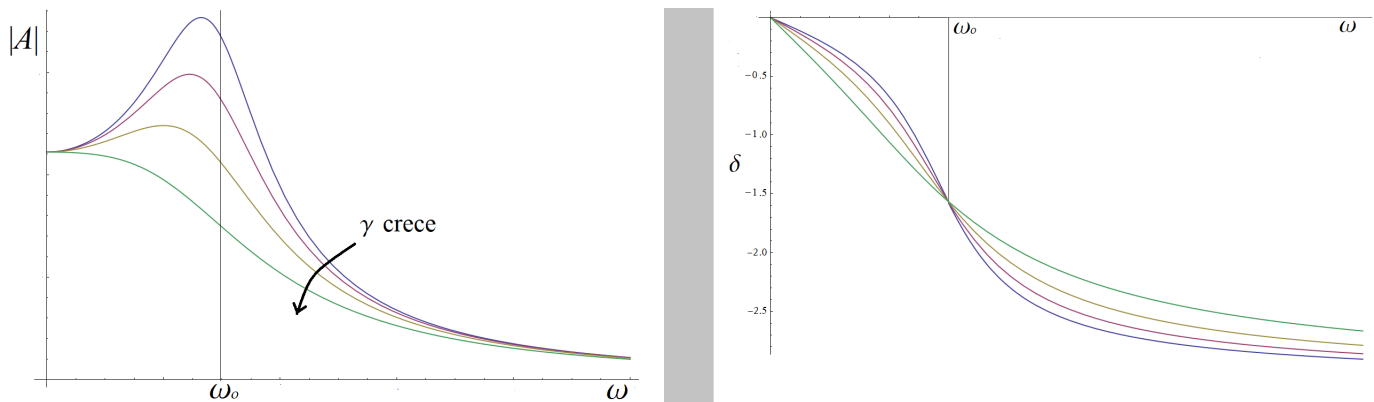
$$\tan \delta = \frac{\text{Im}[A]}{\text{Re}[A]} = \frac{-\gamma \omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

La solución real es

$$x_p(t) = \text{Re}[A e^{i\omega t}] = |A| \cos(\omega t + \delta)$$

Como función de la frecuencia externa  $\omega$ ,  $|A|$  tiene un máximo:<sup>3</sup>

$$\text{si } \omega^2 = \omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow |A| = |A|_{\text{max}} = \frac{\frac{F_o}{m}}{\gamma \sqrt{\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$



<sup>3</sup>Si  $\omega_o < \gamma/\sqrt{2}$ , entonces  $|A|$  es máximo en  $\omega = 0$  (ver Figura).

El trabajo realizado por la fuerza externa en cada ciclo se disipa en forma de calor. La potencia media entregada es

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F_{ext}(t) \dot{x}_P(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_o \cos(\omega t) |A| (-\omega) \sin(\omega t + \delta) dt = -\frac{1}{2} F_o \omega |A| \sin \delta$$

(recordemos que  $\sin \delta < 0$ ). Entonces

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{2} F_o \omega \operatorname{Im}[A] = \frac{F_o^2}{2m} \frac{\gamma}{\omega^2(\frac{\omega_o^2}{\omega^2} - 1)^2 + \gamma^2}$$

que tiene un máximo en  $\omega = \omega_o$  (frecuencia de **resonancia**) donde la potencia vale

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{F_o^2}{2m\gamma} = \frac{F_o^2}{2r}$$

(en lenguaje de circuitos de corriente alterna,  $F_o^2/2$  sería el cuadrado del valor *eficaz* de la fuerza externa).

