

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 13

6 de mayo de 2021

Resonancia paramétrica

1 Resonancia paramétrica

Consideremos un sistema oscilante

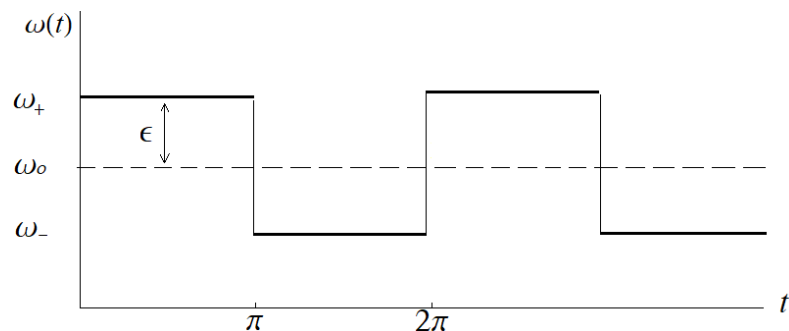
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

cuya frecuencia posee una dependencia periódica en el tiempo:

$$\omega^2(t) = \omega_o^2 (1 + a(t))$$

donde $a(t)$ es periódica. Hay diferentes situaciones físicas que pueden corresponderse con este tipo de sistema. Por ejemplo las pequeñas oscilaciones de un péndulo cuando su hilo sufre, a su vez, variaciones periódicas de su longitud; como cuando una persona se hamaca sola, moviendo su cuerpo de tal forma que la distancia de su centro de masa al punto de suspensión cambia periódicamente. La conocida ecuación de Mathieu es del tipo antedicho, con $a(t) = \kappa \cos(2 t)$.

Aquí estudiaremos el caso sencillo donde $\omega(t)$ es una onda cuadrada



Llamaremos $T = 2\pi$ al período de la variación de la frecuencia propia (esto corresponde a elegir una unidad de tiempo). De esa forma el sistema es un oscilador armónico en cada semiperíodo de variación de la frecuencia ω , pues ω es constante en cada semiperíodo. Para hacer la transición de un semiperíodo al siguiente habrá que tener en cuenta que el estado final del primer semiperíodo se convierte en el estado inicial del siguiente semiperíodo.

Notemos que en este problema hay dos períodos que interactúan: el período $T = 2\pi$ de la variación de ω , y el período del oscilador $\tau = 2\pi/\omega_o$ en torno al cual se produce la variación. Queremos averiguar si aparecen resonancias entre estos dos períodos.

2 El oscilador armónico en el espacio de estados

A los efectos de preparar el abordaje del problema anterior, veamos algunos aspectos del sistema que vamos a perturbar. La solución de la ecuación de oscilador armónico es

$$x(t) = A \cos[\omega_o t + \delta] \quad \Rightarrow \quad v(t) = -A \omega_o \sin[\omega_o t + \delta]$$

Por lo tanto la posición y la velocidad en cada instante satisfacen la ecuación

$$x(t)^2 + \frac{v(t)^2}{\omega_o^2} = A^2$$

Como el par $x(t), v(t)$ caracteriza el estado del sistema, podemos ver a (x, v) como coordenadas en un “espacio de estados”.¹ La ecuación anterior dice que el oscilador armónico evoluciona recorriendo una elipse en el espacio de estados; al cabo de un período $\tau = 2\pi/\omega_o$ el oscilador retorna al estado inicial. La elipse se transforma en una circunferencia si usamos las coordenadas $(x, \frac{v}{\omega_o})$. Otras coordenadas interesantes son (ξ, ξ^*) donde

$$\xi \equiv x - i \frac{v}{\omega_o}$$

En estas coordenadas la evolución del oscilador armónico está dada por

$$\xi(t) = A e^{i(\omega_o t + \delta)} = e^{i\omega_o t} \xi(0)$$

que es otra forma de ver que el estado del sistema a tiempo t resulta de rotar un ángulo $\omega_o t$ sobre la circunferencia a partir del estado inicial $\xi(0) = A e^{i\delta}$.

En relación al caso que trataremos a continuación, señalamos aquí que la estabilidad del oscilador armónico implica que éste permanece en una región acotada del espacio de estados.

¹Este espacio de estados es un remedo del espacio de las fases en el que se realiza el formalismo Hamiltoniano.

3 Variación de la frecuencia propia

Cuando la frecuencia propia varía como una onda cuadrada, tendremos una evolución de oscilador armónico en cada semiperíodo de variación de la frecuencia ω . Para conectar dos semiperíodos contiguos, el estado final del primero de ellos deberá verse como el estado inicial del siguiente semiperíodo:

1) Si $0 < t < \pi$ la frecuencia angular es $\omega = \omega_+$. El estado final de semiperíodo es

$$\xi(\pi) = e^{i\omega_+\pi} \xi(0)$$

es decir

$$x(\pi) = \operatorname{Re}[\xi(\pi)] = \cos[\omega_+ \pi] x(0) + \sin[\omega_+ \pi] \frac{v(0)}{\omega_+}$$

$$\frac{v(\pi)}{\omega_+} = -\operatorname{Im}[\xi(\pi)] = -\sin[\omega_+ \pi] x(0) + \cos[\omega_+ \pi] v(0)$$

Vemos que hay una transformación lineal que lleva del estado en $t = 0$ al estado en $t = \pi$,

$$\begin{pmatrix} x(\pi) \\ v(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos[\omega_+ \pi] & \frac{\sin[\omega_+ \pi]}{\omega_+} \\ -\omega_+ \sin[\omega_+ \pi] & \cos[\omega_+ \pi] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

La matriz de transformación sería una rotación de ángulo $\omega_+ \pi$ en el plano $(x, \frac{v}{\omega_+})$, como muestran las ecuaciones anteriores. Sin embargo preferiremos las coordenadas (x, v) porque no dependen de la frecuencia, que será distinta en el siguiente semiperíodo. Llamaremos M_+ a la matriz que transforma los datos iniciales en datos finales durante el semiperíodo de frecuencia angular ω_+ :

$$\begin{pmatrix} x(\pi) \\ v(\pi) \end{pmatrix} = M_+ \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

2) En el semiperíodo siguiente, la matriz que “mapea” el estado inicial en el estado final se construye con la frecuencia angular ω_- . Por lo demás tiene la misma estructura que M_+ . Llamaremos M_- a esta matriz. Entonces para el semiperíodo $\pi < t < 2\pi$ la relación entre los estados inicial y final es

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ v(2\pi) \end{pmatrix} = M_- \begin{pmatrix} x(\pi) \\ v(\pi) \end{pmatrix}$$

siendo

$$M_{\pm} \equiv \begin{pmatrix} \cos[\omega_{\pm} \pi] & \frac{\sin[\omega_{\pm} \pi]}{\omega_{\pm}} \\ -\omega_{\pm} \sin[\omega_{\pm} \pi] & \cos[\omega_{\pm} \pi] \end{pmatrix}$$

En resumen, en un período $T = 2\pi$ de variación de la frecuencia ω , el mapeo entre estado inicial y final viene dado por la matriz $M \equiv M_- M_+$,

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ v(2\pi) \end{pmatrix} = M_- \begin{pmatrix} x(\pi) \\ v(\pi) \end{pmatrix} = M_- M_+ \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

Podemos entonces entender la evolución del sistema evaluando su estado a tiempos discretos $t = 2k\pi$. En cada período $T = 2\pi$ actúa la matriz M ; en k períodos interviene la

matriz M^k . Quiere decir que la matriz M contiene información valiosa sobre el carácter de la evolución. Trataremos de extraer de M las condiciones para que se produzcan resonancias. Más concretamente, buscaremos responder si la evolución gobernada por la matriz M deja al sistema en una región acotada del espacio de estados o lleva el sistema hacia regiones de amplitudes crecientes.

Una propiedad importante de la matriz M es que su determinante vale 1 debido a que $\det M_{\pm} = 1$,

$$\det M = \det M_+ \det M_- = 1$$

Las transformaciones lineales en un plano que tienen determinante igual a 1 preservan áreas. En efecto, el área del paralelogramo determinado por dos vectores \vec{A} , \vec{B} , es igual a $|\vec{A} \times \vec{B}|$,

$$\text{Área} = |\vec{A} \times \vec{B}| = |A_x B_y - A_y B_x| = \left| \det \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{pmatrix} \right|$$

Si aplicamos una transformación lineal Λ a los vectores columna $|A\rangle$, $|B\rangle$,

$$|A'\rangle = \Lambda |A\rangle, \quad |B'\rangle = \Lambda |B\rangle$$

Entonces la matriz de los vectores \vec{A} , \vec{B} cambia a

$$\begin{pmatrix} A'_x & B'_x \\ A'_y & B'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{xx} & \Lambda_{xy} \\ \Lambda_{yx} & \Lambda_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{pmatrix}$$

Tomando el determinante,

$$\text{Área}' = \det \Lambda \text{Área}$$

Si $\det \Lambda = 1$, entonces el área es preservada.² En relación a la evolución del sistema bajo consideración, como la matriz M tiene determinante igual a 1 podemos afirmar que los estados iniciales que pertenecen a una determinada región del plano (x, v) evolucionan hacia estados finales que pertenecen a otra región de la misma área.

Pero la pregunta que nos interesa contestar es si la evolución será “estable”, en el sentido que el sistema permanece en una región limitada del espacio de estados, o si por el contrario el sistema evoluciona hacia regiones cada vez más alejadas del estado inicial. Como sabemos, toda matriz cuadrada –sea o no simétrica– se puede llevar mediante una transformación de semejanza ($M \rightarrow S^{-1} M S$, donde S puede no ser ortogonal) a la “forma canónica de Jordan”. Si las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \det(M - \lambda \mathbf{1})$ (valores característicos o autovalores de M) son todas diferentes, entonces la forma canónica de Jordan es diagonal. La forma canónica de nuestra matriz M es

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

²Esta propiedad es un caso particular del teorema de Liouville que veremos más adelante.

Como el polinomio característico tiene coeficientes reales, sus dos raíces deben ser reales o complejas conjugadas. Además, como $\det M = 1$ debe cumplirse que

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1$$

Entonces hay dos posibilidades:

1) λ_1, λ_2 son complejos conjugados de módulo 1:

$$\lambda_1 = e^{i\alpha}, \quad \lambda_2 = e^{-i\alpha}$$

Es sabido que estos son los autovalores de la matriz de rotación³

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

lo que significa que en alguna base (es decir, con alguna transformación lineal de las coordenadas x, v) al cabo de k períodos $T = 2\pi$ el sistema se encontrará en un estado que resulta de rotar un ángulo $k\alpha$ sobre una circunferencia. En este caso el sistema es estable en el sentido que permanece en una región acotada del espacio de estados.

2) λ_1, λ_2 son reales e inversos uno del otro:

$$\lambda_1 = \pm e^\alpha, \quad \lambda_2 = \pm e^{-\alpha}$$

Estos autovalores corresponden a una transformación hiperbólica⁴

$$M = \pm \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix}$$

Mientras que las rotaciones mueven puntos sobre círculos, las transformaciones hiperbólicas mueven puntos sobre hipérbolas.⁵ Por lo tanto, en alguna base (es decir, con alguna transformación lineal de las coordenadas x, v) el sistema evoluciona avanzando sobre una hipérbola al cabo de cada período $T = 2\pi$, lo que lo lleva hacia regiones cada vez más alejadas en el espacio de estados.

³La transformación de semejanza que diagonaliza la matriz de rotación es $S = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. A su vez, otra semejanza llevará la matriz de rotación a la forma de la matriz M obtenida en nuestra deducción.

⁴La transformación hiperbólica es diagonalizada por la semejanza $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Una segunda semejanza llevará la transformación hiperbólica a la forma de la matriz M obtenida en nuestra deducción.

⁵La transformación hiperbólica $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ implica que $x'^2 - y'^2 = x^2 - y^2$.

¿Cómo podemos saber si estamos en el primero o el segundo caso sin calcular los autovalores de $M = M_- M_+$? Vamos a usar que la traza de una matriz cuadrada es invariante ante transformaciones de semejanza ($Tr(S^{-1} M S) = Tr M$). Cuando la matriz está diagonalizada su traza es $\lambda_1 + \lambda_2$; la idea es comparar este valor con la traza de $M_- M_+$. Notemos que

$$1) \lambda_1 = e^{i\alpha}, \quad \lambda_2 = e^{-i\alpha} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad |Tr M| \leq 2$$

$$2) \lambda_1 = \pm e^\alpha, \quad \lambda_2 = \pm e^{-\alpha} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \pm 2 \cosh \alpha \quad \Rightarrow \quad |Tr M| \geq 2$$

Esto significa que debemos ver si la traza de $M_- M_+$ es mayor o menor que 2 para así saber si el sistema es estable o resuena:

$$M_- M_+ = \begin{pmatrix} \cos \omega_- \pi \cos \omega_+ \pi - \frac{\omega_+}{\omega_-} \sin \omega_+ \pi \sin \omega_- \pi & \dots \\ \dots & \cos \omega_+ \pi \cos \omega_- \pi - \frac{\omega_-}{\omega_+} \sin \omega_- \pi \sin \omega_+ \pi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Tr(M_- M_+) = 2 \cos \omega_- \pi \cos \omega_+ \pi - \left(\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+} \right) \sin \omega_+ \pi \sin \omega_- \pi$$

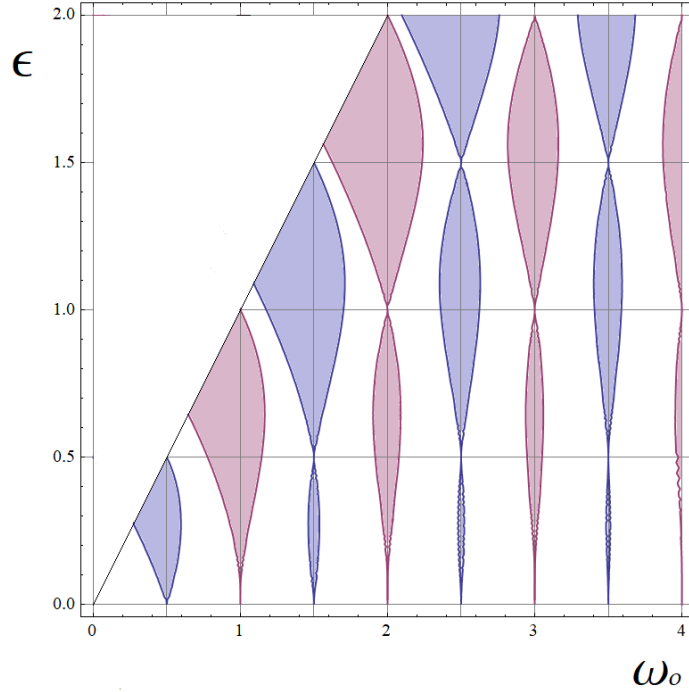
Entonces, si llamamos ω_o al promedio de ω_\pm (como en la Figura inicial), resulta

$$\omega_\pm = \omega_o \pm \varepsilon$$

Nos interesa saber para qué relación entre ω_o y ε será $|Tr(M_- M_+)| > 2$, y tendremos el fenómeno de **resonancia paramétrica**. Usaremos un programa de cálculo para dibujar las curvas $\varepsilon(\omega_o)$ tales que $Tr(M_- M_+) = \pm 2$. Esas curvas separarán las zonas estables de las de resonancia. Es decir que graficaremos

$$\pm 2 = 2 \cos(\omega_o - \varepsilon)\pi \cos(\omega_o + \varepsilon)\pi - \left(\frac{\omega_o + \varepsilon}{\omega_o - \varepsilon} + \frac{\omega_o - \varepsilon}{\omega_o + \varepsilon} \right) \sin(\omega_o + \varepsilon)\pi \sin(\omega_o - \varepsilon)\pi$$

para $\varepsilon < \omega_o$ (pues ω_- debe ser positivo). La Figura muestra el resultado:



Las zonas azules corresponden a $Tr(M_-M_+) \leq -2$, y las zonas rojas indican $Tr(M_-M_+) \geq 2$. Ambas zonas sombreadas son zonas de resonancia paramétrica (naturalmente, las zonas donde $\varepsilon = 0$ deben ser zonas de estabilidad). Las zonas de resonancia paramétrica están caracterizadas por los valores $\omega_o = k/2$, es decir

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Si recordamos que la unidad de tiempo fue elegida para que $T = 2\pi$, donde T es el período de la variación de la frecuencia propia del sistema, entonces la expresión anterior dice que

$$\frac{T}{\tau} = \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Es decir que la resonancia paramétrica aparece cuando la frecuencia propia del sistema oscila con un período T aproximadamente igual a

$$T = \frac{k}{2} \tau = \frac{k\pi}{\omega_o}$$

Bibliografía

V. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer.

4 Ecuación de Mathieu

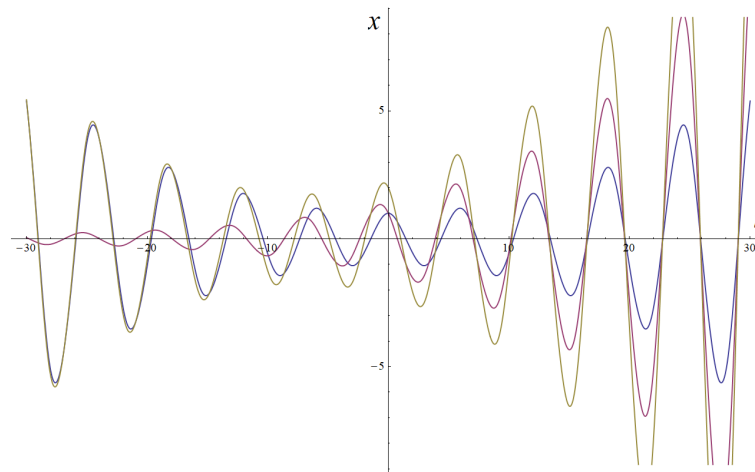
A continuación veremos un ejemplo de resonancia paramétrica en la ecuación de Mathieu

$$\ddot{x} + \omega_o^2 [1 + \kappa \cos(2t)] x = 0$$

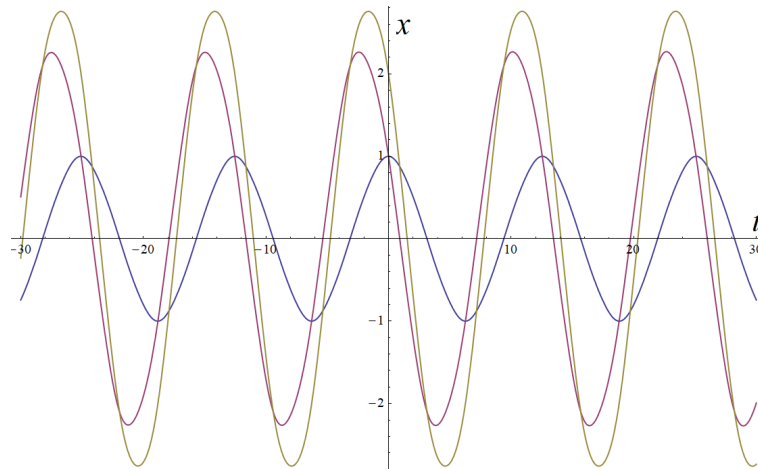
En esta ecuación el período de variación de la frecuencia es $T = \pi$. Para cumplir con la condición de resonancia elegimos $\omega_o = 1$. Vamos a resolver numéricamente la ecuación⁶

$$\ddot{x} + (1 + 0.3 \cos(2t)) x = 0$$

La siguiente Figura muestra soluciones con distintas condiciones iniciales.



Si en cambio elegimos $\omega_o = .5$, con las mismas condiciones iniciales obtendremos estabilidad:



⁶En *Mathematica* usar, por ejemplo:

```
NDSolve[{x''[t] + (1 + .3 Cos[2 t]) x[t] == 0, x[0] == 1, x'[0] == 0}, x[t], {t, -30, 30}]  
Plot[Evaluate[x[t] /. %], {t, -30, 30}]
```