Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 15

13 de mayo de 2021

Tensor de inercia. Ecuaciones de Euler

1 Momento angular del cuerpo rígido

La velocidad de los puntos de un rígido se escribe $\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_O)$. Calculemos el momento angular del cuerpo rígido respecto de un punto O que pertenece al mismo:

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum_i m_i \; (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \; (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \Big(\vec{v}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_O)\Big) \\ &= M \; (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_O) \times \vec{v}_O + \sum_i m_i \; \vec{r}_{iO} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{iO})\end{aligned}$$

El primer término se anula si O está fijo o si $O \equiv CM$. En el segundo término preferiremos ver al cuerpo como una distribución continua de materia:

$$\vec{L}_O = \int \delta m \;\; \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \;\; , \qquad\qquad O \text{ es un punto fijo del cuerpo o su } CM \tag{1}$$

donde $\vec{r}$ es la posición de δm relativa a O. El doble producto vectorial cumple que

$$\vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \; r^2 - \vec{r} \; (\vec{\Omega} \cdot \vec{r})$$

En particular, la componente x de $\vec{L}_O$ es

$$\begin{aligned}L_{O\;x} &= \int \delta m \;\; \big[\Omega_x \; (x^2 + y^2 + z^2) - x \; (\Omega_x \; x + \Omega_y \; y + \Omega_z \; z)\big] \\ &= \int \delta m \;\; \big[\Omega_x \; (y^2 + z^2) - \Omega_y \; x \; y - \Omega_z \; x \; z\big]\end{aligned}$$

y del mismo modo con las restantes componentes de $\vec{L}_O$. En suma, hay una relación lineal entre las componentes de $\vec{L}_O$ y las de $\vec{\Omega}$, pero $\vec{L}_O$ y $\vec{\Omega}$ no son necesariamente paralelos.

2 Tensor de inercia

La relación lineal entre $\vec{L}_O$ y $\vec{\Omega}$ se puede expresar en forma matricial:

$$|L_O> = \mathbf{I}_O \; |\Omega> \; , \qquad\qquad O \text{ es un punto fijo del cuerpo o su } CM \tag{2}$$

donde $\mathbf{I}_O$ es el **tensor de inercia**, que contiene información sobre la distribución de la masa del cuerpo,

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} \int \delta m\ (y^2+z^2) & -\int \delta m\ xy & -\int \delta m\ xz \\ -\int \delta m\ xy & \int \delta m\ (x^2+z^2) & -\int \delta m\ yz \\ -\int \delta m\ xz & -\int \delta m\ yz & \int \delta m\ (x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Las componentes del tensor de inercia son

$$I_{O\ \mu\nu} = \int \delta m\ (r^2\ \delta_{\mu\nu} - x_\mu\ x_\nu)$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. El elemento de masa δm se expresa en términos de la densidad de masa $\rho(\vec{r})$ como $\delta m = \rho(\vec{r})\ d\mathcal{V}$; así la integración se realiza sobre el volumen $\mathcal{V}$ del cuerpo.

2.1 Propiedades

El tensor de inercia es simétrico ($I_{O\ \mu\nu} = I_{O\ \nu\mu}$), y es aditivo (el tensor de inercia de un cuerpo se puede descomponer en la suma de los tensores de inercia de sus partes).

Las componentes diagonales son positivas y se llaman **momentos de inercia**. Son iguales a la suma de los elementos de masa δm multiplicados por los cuadrados de sus respectivas distancias a los ejes cartesianos que pasan por O (recordemos que x, y, z vienen de las componentes cartesianas de $\vec{r}_{iO}$). Así, por ejemplo, $y^2 + z^2$ en $I_{O\ xx}$ no es más que el cuadrado de la distancia de δm al eje x que pasa por O. Cada momento de inercia no puede superar la suma de los otros dos:[1]

$$I_{O\ xx} + I_{O\ yy} = \int \delta m\ (x^2 + y^2 + 2z^2) \geqslant \int \delta m\ (x^2 + y^2) = I_{O\ zz}$$

Las componentes fuera de la diagonal se llaman **productos de inercia**. Si la distribución de masa es simétrica respecto de un plano cartesiano que contiene a O, digamos el plano $x-y$, esto significa que por cada elemento de masa δm ubicado en (x, y, z) habrá un elemento de igual masa ubicado en $(x, y, -z)$ (recordemos que éstas son las posiciones medidas desde O). Esto anulará las sumas $\sum_i m_i\ x_i\ z_i$ y $\sum_i m_i\ y_i\ z_i$; es decir que se obtendrá $I_{O\ xz} = 0 = I_{O\ yz}$.

[1] Si todas las partículas del cuerpo pertenecen al plano $z = 0$, entonces vale que $I_{O\ xx} + I_{O\ yy} = I_{O\ zz}$. Si todas las partículas se sitúan sobre el eje z, entonces $I_{O\ xx} = I_{O\ yy} = \int \delta m\ z^2$, $I_{O\ zz} = 0$. El cuerpo se denomina *rotador*. Por ser un segmento recto, tiene sólo dos grados de libertad de rotación.

3 Ejes principales de inercia

Como sucede con los vectores, las componentes de los tensores dependen de la orientación de los ejes cartesianos. En el caso del tensor de inercia, un cambio en la orientación de los ejes cartesianos modifica los valores de las componentes x, y, z de los vectores $\vec{r}_{iO}$, y con ello modifican las componentes de $\mathbf{I}_O$. En particular se pueden elegir ejes cartesianos tales que $\mathbf{I}_O$ resulte diagonal. En efecto, como $\mathbf{I}_O$ es simétrico entonces posee autovectores ortogonales. Si los ejes cartesianos se eligen en la dirección de los autovectores, entonces $\mathbf{I}_O$ quedará diagonalizado. Los ejes cartesianos que diagonalizan el tensor de inercia se llaman **ejes principales de inercia**.

La existencia de simetría alivia o directamente evita resolver el problema de autovectores para diagonalizar el tensor de inercia. Cuando la distribución de masa posee un plano de simetría que contiene a O, entonces uno de los ejes principales de $\mathbf{I}_O$ es perpendicular al plano de simetría. En efecto, ya vimos que si $x - y$ es el plano de simetría entonces resulta $I_{O\ xz} = 0 = I_{O\ yz}$; la nulidad de las componentes no diagonales del sector z dice que el eje z es un eje principal de $\mathbf{I}_O$. Así quedará por diagonalizar el bloque $x - y$ de $\mathbf{I}_O$. Debe notarse que el CM está contenido en todo plano de simetría. Por lo tanto, en el ejemplo anterior el eje z será también un eje principal de $\mathbf{I}_{CM}$. Si hubiera un segundo plano de simetría tendríamos entonces un segundo eje principal para $\mathbf{I}_{CM}$, y el tercer eje sería perpendicular a los dos anteriores. Veremos enseguida que si O pertenece a un eje principal de $\mathbf{I}_{CM}$, entonces $\mathbf{I}_O$ y $\mathbf{I}_{CM}$ comparten ejes principales (ver Teorema de Steiner). Pero en un caso más general, los ejes principales de $\mathbf{I}_O$ tendrán direcciones diferentes de los de $\mathbf{I}_{CM}$. Cuando un cuerpo tiene simetría de revolución, entonces el eje de la simetría es eje principal de $\mathbf{I}_{CM}$, y los otros ejes son dos ejes perpendiculares cualesquiera en el plano perpendicular al eje de simetría (hay degeneración).

Los autovalores I_1, I_2, I_3 del tensor de inercia se denominan **momentos principales de inercia**. El cuerpo se llama **trompo asimétrico** si $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, **trompo simétrico** si $I_1 = I_2 \neq I_3$, y **trompo esférico** si $I_1 = I_2 = I_3$. En el último caso la degeneración es completa, y cualquier dirección es un eje principal.

A continuación vemos una lista de momentos principales de inercia de $\mathbf{I}_{CM}$ para cuerpos de uso frecuente:

esfera (radio R): $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} M R^2$

cubo (lado L): $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{6} M L^2$

cilindro (radio R, longitud L): $I_1 = I_2 = \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{L^2}{3}\right)$, $I_3 = \frac{1}{2} M R^2$

cono (base de radio R, altura L): $I_1 = I_2 = \frac{3M}{20}\left(R^2 + \frac{L^2}{4}\right)$, $I_3 = \frac{3}{10} M R^2$

4 Teorema de Steiner

$\mathbf{I}_O$ no sólo es sensible a la orientación de los ejes cartesianos; también lo es a la elección de O. Veamos cuál es la relación entre $\mathbf{I}_O$ y $\mathbf{I}_{CM}$ (a igual orientación de los ejes cartesianos). Sea

$\vec{a}$ la posición de O respecto del CM

$\vec{r} = \vec{r}_{i\ O}$ (como hasta aquí)

$\vec{r}\,' = \vec{r}_{i\ CM}$

Entonces $\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{a}$. Si reemplazamos en $\vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$, que es la expresión que da lugar a $\mathbf{I}_O$,

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= (\vec{r}\,' - \vec{a}) \times \left(\vec{\Omega} \times (\vec{r}\,' - \vec{a})\right) \\ &= \vec{r}\,' \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,') - \vec{a} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,') - \vec{r}\,' \times (\vec{\Omega} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\Omega} \times \vec{a}) \end{aligned}$$

Los términos segundo y tercero no contribuyen al tensor de inercia pues

$$\int \delta m\ \vec{r}\,' = 0$$

(los $\vec{r}\,'$ están medidos respecto del CM; por lo tanto la integral resulta igual a M multiplicado por la posición del CM respecto de CM, que es cero). Por otro lado, el primer término da $\mathbf{I}_{CM}$ y el cuarto término es

$$\vec{a} \times (\vec{\Omega} \times \vec{a}) = \vec{\Omega}\ a^2 - \vec{a}\ (\vec{\Omega} \cdot \vec{a})$$

que tiene la estructura ya estudiada. Entonces obtenemos el **Teorema de Steiner**:

$$I_{O\ \mu\nu} = I_{CM\ \mu\nu} + M\ \left(a^2 \delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu\right)$$

donde usamos que $\int \delta m = M$. El teorema dice que $\mathbf{I}_O$ se descompone en la suma de $\mathbf{I}_{CM}$ más el tensor de inercia de una partícula de masa M ubicada en O (pues $\vec{a}$ es el vector que une el CM con O).

Si los ejes elegidos son los ejes principales de $\mathbf{I}_{CM}$ entonces $\mathbf{I}_O$ permanecerá diagonal siempre que $a_\mu a_\nu$ lo sea; es decir, a_μ debería tener una única componente no nula, lo que significa que O debería estar sobre uno de los ejes principales. En otro caso, los ejes principales de $\mathbf{I}_O$ no coinciden con los de $\mathbf{I}_{CM}$.

5 Descomposición del momento angular en ejes principales

La relación lineal (2) entre el momento angular $\vec{L}_O$ y la velocidad de rotación $\vec{\Omega}$, cuando O es un punto fijo del cuerpo o su CM, puede ser descompuesta en cualquier terna de ejes, independientemente del sistema de referencia donde se miden $\vec{L}_O$ y $\vec{\Omega}$. Si elegimos la terna de los ejes principales del cuerpo, que llamaremos $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, entonces la ecuación (2) queda

$$\begin{pmatrix} L_{O\ 1} \\ L_{O\ 2} \\ L_{O\ 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{O1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{O2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{O3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

o bien

$$\vec{L}_O = I_{O1}\ \Omega_1\ \hat{e}_1 + I_{O2}\ \Omega_2\ \hat{e}_2 + I_{O3}\ \Omega_3\ \hat{e}_3 \tag{3}$$

donde O es un punto fijo del cuerpo o su CM. $\vec{L}_O$ y $\vec{\Omega}$ son paralelos sólo si tienen la dirección de un eje principal (es decir, si $\vec{\Omega}$ es autovector de $\mathbf{I}_O$). Por ejemplo, si tienen la dirección de $\hat{e}_1$ entonces es $\vec{L}_O = I_1\ \vec{\Omega}$.

6 Dinámica del cuerpo rígido. Ecuaciones de Euler

Hemos visto que para todo sistema de partículas que interactúen con fuerzas $\vec{f}_{ij} \parallel \vec{r}_{ij}$ vale que

$$\vec{N}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

donde O es un punto fijo del sistema de referencia inercial S o el CM del sistema de partículas. Un sistema S_c fijo al cuerpo rota con velocidad $\vec{\Omega}$ respecto de S. Entonces, el teorema de la derivada relativa nos permite escribir

$$\vec{N}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}|_{S_c} + \vec{\Omega} \times \vec{L}_O \tag{4}$$

En el sistema fijo al cuerpo la distribución de masa no cambia; por lo tanto no cambian los momentos principales de inercia ni los ejes principales. Entonces, usando (3),

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}|_{S_c} = I_{O1}\ \dot{\Omega}_1\ \hat{e}_1 + I_{O2}\ \dot{\Omega}_2\ \hat{e}_2 + I_{O3}\ \dot{\Omega}_3\ \hat{e}_3$$

que vale cuando O es un punto fijo del cuerpo o su CM. En suma, descomponiendo la ecuación (4) en los ejes principales del cuerpo obtenemos las **ecuaciones de Euler**

$$\boxed{\begin{array}{rcl} N_{O\ 1}^{ext} & = & I_{O1}\ \dot{\Omega}_1 + (I_{O3} - I_{O2})\ \Omega_2\ \Omega_3 \\ N_{O\ 2}^{ext} & = & I_{O2}\ \dot{\Omega}_2 + (I_{O1} - I_{O3})\ \Omega_1\ \Omega_3 \\ N_{O\ 3}^{ext} & = & I_{O3}\ \dot{\Omega}_3 + (I_{O2} - I_{O1})\ \Omega_1\ \Omega_2 \end{array}} \tag{5}$$

válidas cuando O es el CM o es un punto del cuerpo que está fijo en el sistema de referencia inercial S. Estas ecuaciones gobiernan la rotación del cuerpo rígido.

7 Energía cinética del cuerpo rígido

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left|\vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{iO}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\ M\ v_O^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i\ \vec{v}_O \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{iO}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left|\vec{\Omega} \times \vec{r}_{iO}\right|^2 \end{aligned}$$

El segundo término se anula si O es un punto fijo del cuerpo o es su CM (pues $\sum m_i \, \vec{r}_{iCM} = 0$). Para el último término usaremos la propiedad cíclica del producto mixto,

$$\left|\vec{\Omega} \times \vec{r}_{iO}\right|^2 = (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{iO}) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{iO}) = \vec{\Omega} \cdot [\vec{r}_{iO} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{iO})]$$

donde reconocemos el factor $\vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ que determina el momento angular (1) cuando O es un punto fijo del cuerpo o es su CM. En tal caso la energía cinética resulta

$$T = \frac{1}{2} \, M \, v_O^2 + \frac{1}{2} \, \vec{\Omega} \cdot \vec{L}_O = \frac{1}{2} \, M \, v_O^2 + \frac{1}{2} \, < \Omega | \, \mathbf{I}_O \, | \Omega >$$

Vemos que la energía cinética de rotación se escribe en términos de las proyecciones de $\vec{\Omega}$ sobre los ejes principales como

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \, I_{O1} \, \Omega_1^2 + \frac{1}{2} \, I_{O2} \, \Omega_2^2 + \frac{1}{2} \, I_{O3} \, \Omega_3^2$$

que se puede expresar en función de los ángulos de Euler y sus derivadas.

8 Formalismo Lagrangiano

Las ecuaciones de Euler pueden obtenerse también dentro del formalismo Lagrangiano. Sin embargo la comparación entre los sistemas de ecuaciones respectivos se complica porque las fuerzas generalizadas asociadas a los ángulos de Euler, los torques Q_ϕ, Q_θ, Q_ψ, no se relacionan en forma directa con las componentes $N^{ext}_{O\,1}, N^{ext}_{O\,2}, N^{ext}_{O\,3}$ del torque. Esto se debe a que ϕ, θ no corresponden a rotaciones en torno a la terna fija al cuerpo. Sin embargo ψ representa una rotación en torno a $\hat{k}_C = \hat{e}_3$; de modo que $N^{ext}_{O\,3} = Q_\psi$. Entonces la ecuación de Lagrange para ψ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi$$

debería coincidir con la tercera ecuación de Euler (y las otras dos ecuaciones de Euler se obtendrían permutando ejes). Veamos que efectivamente es así; por un lado es

$$\frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\psi}} = I_{O3} \, \Omega_3 \, \frac{\partial \Omega_3}{\partial \dot{\psi}} = I_{O3} \, \Omega_3$$

y por otro lado

$$\frac{\partial T_{rot}}{\partial \psi} = I_{O1} \, \Omega_1 \, \frac{\partial \Omega_1}{\partial \psi} + I_{O2} \, \Omega_2 \, \frac{\partial \Omega_2}{\partial \psi} = I_{O1} \, \Omega_1 \, \Omega_2 - I_{O2} \, \Omega_2 \, \Omega_1$$

Entonces la ecuación de Lagrange para ψ da lo que esperábamos:

$$I_{O3} \, \dot{\Omega}_3 + (I_{O2} - I_{O1}) \, \Omega_1 \, \Omega_2 = Q_\psi .$$