

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 16

20 de mayo de 2021

Trompo simétrico libre de torques

1 Rotación alrededor de ejes principales

Comenzaremos utilizando las ecuaciones de Euler para estudiar cuerpos libres de torque. Recordemos que esas ecuaciones son válidas cuando O es el CM o es un punto del cuerpo que permanece fijo en el sistema de referencia inercial. Pediremos entonces que se anule el torque \vec{N}_O^{ext} respecto de un centro de momentos O con esas características. Por ejemplo, si despreciamos la interacción con el aire, podemos afirmar que un cuerpo lanzado por el aire está actuado sólo por la fuerza peso; en tal caso se anula el torque respecto del CM .¹

Si un cuerpo libre de torques rota inicialmente sobre un eje principal, digamos el eje 3 (es decir, si $\Omega_1(0) = 0 = \Omega_2(0)$), tendremos que las ecuaciones de Euler dicen que inicialmente se cumple que

$$0 = \dot{\Omega}_1(0), \quad 0 = \dot{\Omega}_2(0), \quad 0 = \dot{\Omega}_3(0);$$

por lo tanto el cuerpo seguirá rotando sobre el eje 3 con velocidad constante Ω_3 , conservando el momento angular $\vec{L}_O = I_{O3} \Omega_3 \hat{e}_3$. Nos interesa saber si esta situación es estable o no. Para ello perturbaremos Ω_1, Ω_2 ,

$$\Omega_1 = \varepsilon_1(t), \quad \Omega_2 = \varepsilon_2(t),$$

¹El torque del peso respecto de un punto O es $\vec{N}_O^{ext} = \int \vec{r} \times \delta m \vec{g} = [\int \delta m \vec{r}] \times \vec{g} = M \vec{R}_{CM-O} \times \vec{g}$, pues los \vec{r} son posiciones relativas a O . El resultado permite ver al peso $M\vec{g}$ como una fuerza aplicada en el CM . Sin embargo, esto sólo es correcto bajo la aproximación de campo gravitatorio uniforme.

y desarrollaremos las ecuaciones de Euler a primer orden en las perturbaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= I_{O1} \dot{\varepsilon}_1 + (I_{O3} - I_{O2}) \varepsilon_2 \Omega_3 \\ 0 &= I_{O2} \dot{\varepsilon}_2 + (I_{O1} - I_{O3}) \varepsilon_1 \Omega_3 \\ 0 &\simeq I_{O3} \dot{\Omega}_3 \end{aligned}$$

La tercera ecuación dice que Ω_3 es constante a primer orden en las perturbaciones. Para desacoplar las ecuaciones para $\varepsilon_1(t)$ y $\varepsilon_2(t)$, derivamos la primera y reemplazamos la segunda:

$$0 = \ddot{\varepsilon}_1 + \frac{(I_{O3} - I_{O2})(I_{O3} - I_{O1})\Omega_3^2}{I_{O1} I_{O2}} \varepsilon_1$$

Vemos que $\varepsilon_1(t)$ oscila (situación estable) si

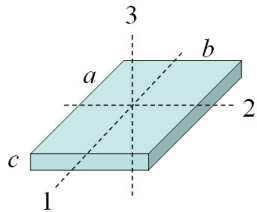
$$(I_{O3} - I_{O2})(I_{O3} - I_{O1}) > 0 \quad (1)$$

Lo mismo sucede con $\varepsilon_2(t)$. En ese caso ambas perturbaciones oscilan con una frecuencia dada por

$$\omega^2 = \frac{(I_{O3} - I_{O2})(I_{O3} - I_{O1}) \Omega_3^2}{I_{O1} I_{O2}}$$

En caso contrario tendríamos un crecimiento exponencial de las perturbaciones (mientras valgan las aproximaciones realizadas).

El resultado (1) dice que en el trompo simétrico (por ejemplo, una pelota de rugby) la rotación vecina al eje de simetría es siempre estable. En el caso general de un trompo asimétrico hay dos casos estables y uno inestable:

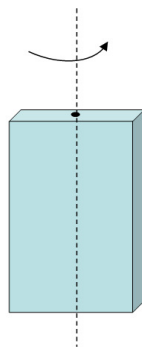


$$I_{CM1} = M(b^2 + c^2) / 12$$

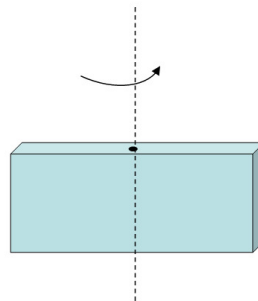
$$I_{CM2} = M(a^2 + c^2) / 12$$

$$I_{CM3} = M(a^2 + b^2) / 12$$

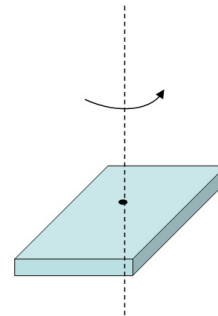
$$I_{CM1} < I_{CM2} < I_{CM3}$$



estable



inestable



estable

2 Trompo simétrico libre de torques

El problema anterior tiene solución exacta si el trompo es simétrico. Si

$$I_{O1} = I_{O2} \equiv I_O$$

las ecuaciones de Euler en ausencia de torque respecto de O resultan

$$\begin{aligned} 0 &= I_O \dot{\Omega}_1 + (I_{O3} - I_O) \Omega_2 \Omega_3 \\ 0 &= I_O \dot{\Omega}_2 + (I_O - I_{O3}) \Omega_1 \Omega_3 \\ 0 &= I_{O3} \dot{\Omega}_3 \end{aligned}$$

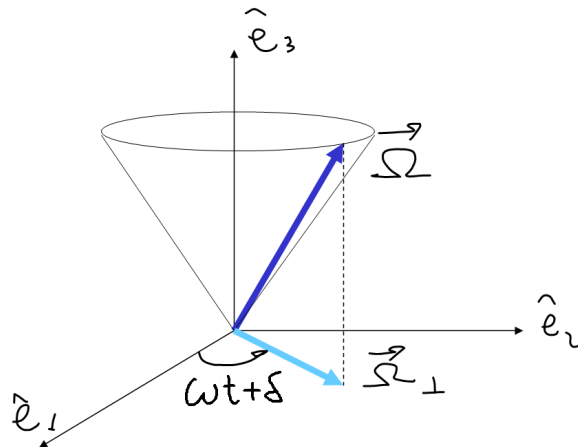
La solución exacta es

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= A \cos(\omega t + \delta) \\ \Omega_2 &= A \sin(\omega t + \delta) \\ \Omega_3 &= cte \end{aligned} \quad (2)$$

con

$$\omega = \frac{I_{O3} - I_O}{I_O} \Omega_3 \quad (3)$$

Nótese que $|\vec{\Omega}|$ es constante. Como también Ω_3 es constante, entonces es constante el ángulo que forma $\vec{\Omega}$ con el eje principal \hat{e}_3 . En el sistema fijo al cuerpo de ejes principales, el vector $\vec{\Omega}$ precece alrededor del eje principal 3; el extremo de $\vec{\Omega}$ describe una circunferencia alrededor de \hat{e}_3 .



Como $\vec{\Omega}_\perp = \Omega_1 \hat{e}_1 + \Omega_2 \hat{e}_2$ es un vector de módulo constante que se mueve con velocidad angular constante igual a ω , lo mismo sucede con $\vec{\Omega}$.²

A modo de ejemplo, digamos que la precesión de $\vec{\Omega}$ alrededor del eje de simetría del cuerpo es un fenómeno que tiene un efecto en la relación entre nuestro planeta Tierra y la bóveda celeste. La Tierra está sometida a pequeños torques respecto de su CM por parte de la Luna

²Nótese que se conserva la energía cinética de rotación $T_{rot} = (1/2)(I_O |\vec{\Omega}_\perp|^2 + I_{O3} \Omega_3^2)$.

y el Sol, que se pueden ignorar en una primera aproximación. Además, la Tierra es bastante fielmente un trompo simétrico. Entonces vale el resultado obtenido, y podemos decir que el eje instantáneo de rotación de la Tierra precede alrededor de su eje de simetría que une los polos geográficos (en efecto, existe un pequeño ángulo entre ambos ejes). ¿Hay alguna evidencia empírica de esta precesión? Sí la hay pues, como consecuencia, el eje de rotación de la bóveda celeste, que tiene la dirección de $\vec{\Omega}$, precede alrededor de la recta que une los polos geográficos. La *precesión de Chandler* (1891) tiene un período de 427 días.³ En 1749 Euler había estimado un período de 306 días; como el ángulo entre $\vec{\Omega}$ y \hat{e}_3 es muy pequeño, se puede decir que $\Omega_3 \simeq 2\pi/(1 \text{ día})$ y así tenemos el valor de ω :

$$\omega = \frac{I_{CM3} - I_{CM}}{I_{CM}} \Omega_3 \simeq \frac{1}{306} \frac{2\pi}{1 \text{ día}} = \frac{2\pi}{306 \text{ días}}$$

La discrepancia entre el valor estimado y el valor observado se atribuye a que la Tierra no es un cuerpo rígido (tiene un núcleo fundido, océanos que son deformados por fuerzas de marea, etc.).

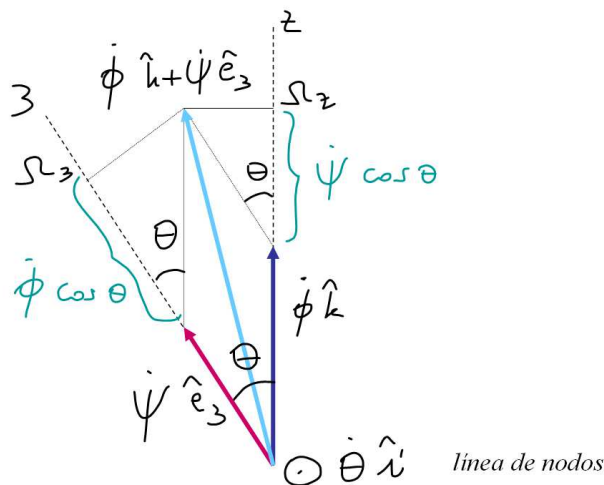
Las evoluciones de los ángulos de Euler deberían surgir de las relaciones entre los mismos y $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ (cuyas evoluciones acabamos de obtener); esas relaciones son

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (4)$$

Recordemos que estas relaciones provienen de esta otra:

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{i}' + \dot{\psi} \hat{k}_c \quad (5)$$

que está representada en la siguiente Figura:



³No confundir con la *precesión de los equinoccios*, que tiene un período de 25776 años y es producida por los torques ejercidos por la Luna y el Sol.

Ahora bien, los valores de los ángulos de Euler dependen de cómo se eligen la terna fija al cuerpo (en nuestro caso es la terna de ejes principales) y la terna inercial $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. Haremos una elección de \hat{k} que será la más simple para caracterizar el ángulo θ . Aprovechando que \vec{L}_O se conserva, usaremos un sistema inercial cuyo eje z está orientado como \vec{L}_O ; entonces $\vec{L}_O = L_O \hat{k}$. En ese caso, la relación $|L_O \rangle^C = R_\psi R_\theta R_\phi |L_O \rangle$ resulta

$$\begin{pmatrix} L_{O1} \\ L_{O2} \\ L_{O3} \end{pmatrix} = R_\psi R_\theta R_\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_O \sin \theta \sin \psi \\ L_O \sin \theta \cos \psi \\ L_O \cos \theta \end{pmatrix}$$

y como $L_{O1} = I_O \Omega_1$, $L_{O2} = I_O \Omega_2$, $L_{O3} = I_{O3} \Omega_3$, tendremos que

$$\begin{aligned} I_O \Omega_1 &= L_O \sin \theta \sin \psi \\ I_O \Omega_2 &= L_O \sin \theta \cos \psi \\ I_{O3} \Omega_3 &= L_O \cos \theta \end{aligned} \quad (6)$$

De los resultados obtenidos para $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ sabemos que Ω_3 es constante; entonces la última ecuación implica que θ es constante

$$\cos \theta = \frac{I_{O3} \Omega_3}{L_O} = cte \quad (7)$$

Esto significa que el ángulo entre el eje \hat{e}_3 y el vector \vec{L}_O es constante: el eje de simetría del trompo precece alrededor de \vec{L}_O .⁴

Sabiendo que $\dot{\theta} = 0$ ⁵ y comparando las primeras (o las segundas) ecuaciones en (4) y (6), se obtiene que la precesión del eje de simetría del trompo \hat{e}_3 alrededor de la dirección de \vec{L}_O , que viene dado por el corrimiento de la línea de nodos a velocidad $\dot{\phi}$, es uniforme con velocidad

$$\dot{\phi} = \frac{L_O}{I_O} \quad (8)$$

Dividiendo la primera y segunda ecuación en (6) se obtiene

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \cot \psi$$

y usando la solución (2)

$$\tan(\omega t + \delta) = \cot \psi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$$

es decir que el giro alrededor del eje \hat{e}_3 se realiza a velocidad constante

$$\dot{\psi} = -\omega$$

⁴Para un rotador el resultado es $\theta = \pi/2$, pues $I_{O3} = 0$. El rotador libre de torques gira en el plano perpendicular a \vec{L}_O . Tanto el rotador como el trompo esférico satisfacen que $\vec{L}_O = I_O \vec{\Omega}$. Por lo tanto, en estos dos cuerpos la conservación de \vec{L}_O equivale a la conservación de $\vec{\Omega}$.

⁵Puede sorprender que no haya otra posibilidad para $\dot{\theta}$ que la de anularse. Esto es una consecuencia de haber elegido el eje z en la dirección de \vec{L}_O .

Reemplazando estos resultados en (5), donde \hat{k}_c es el eje de simetría \hat{e}_3 , obtenemos

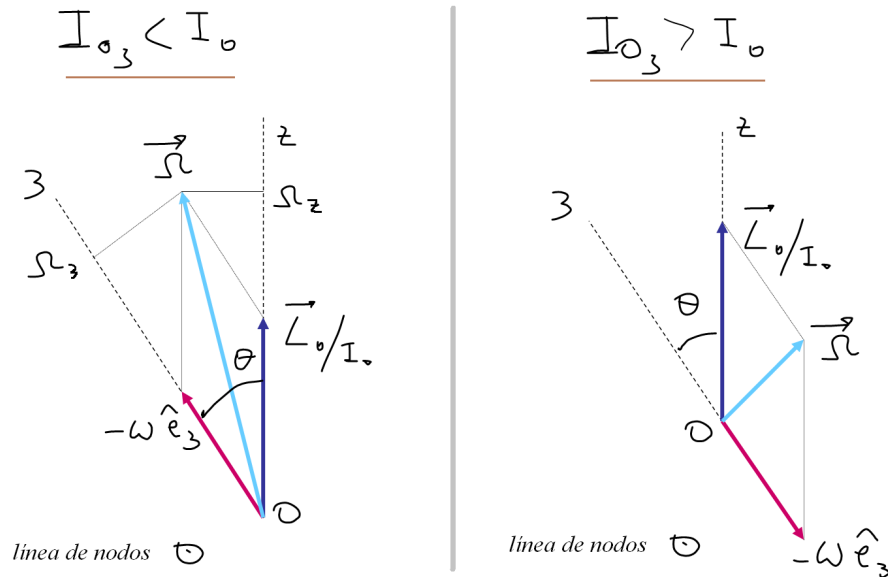
$$\vec{\Omega} = \frac{L_O}{I_O} \hat{k} - \omega \hat{e}_3 = \frac{\vec{L}_O}{I_O} - \omega \hat{e}_3$$

$\vec{\Omega}$ está en el plano formado por \vec{L}_O y el eje de simetría \hat{e}_3 . A la vez que el eje de simetría precece alrededor de \vec{L}_O con velocidad constante $\dot{\phi} = L_O/I_O$, el cuerpo gira alrededor de \hat{e}_3 con velocidad constante $\dot{\psi} = -\omega$. Estas dos velocidades constantes vienen dadas por las condiciones iniciales (L_O y ω son dos constantes de integración). El valor de $\dot{\phi}$ se relaciona directamente con el módulo del momento angular, mientras que la relación entre ambas velocidades determina el ángulo θ entre \vec{L}_O y el eje de simetría:

$$\frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}} = \frac{-\omega}{\frac{L_O}{I_O}} = (I_O - I_{O3}) \frac{\Omega_3}{L_O} = \frac{I_O - I_{O3}}{I_{O3}} \cos \theta$$

donde usamos (3) y (6). Por lo tanto, los valores de $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ (o los valores L_O y ω) caracterizan completamente el vector \vec{L}_O .

En suma, hemos mostrado que el eje instantáneo de rotación precece alrededor del eje de simetría \hat{e}_3 , y este eje de simetría a su vez precece alrededor de la dirección de \vec{L}_O . Esto ocurre de tal forma que $\vec{\Omega}$ permanece en el plano formado por \vec{L}_O y \hat{e}_3 ; este plano gira con velocidad $\dot{\phi} = L_O/I_O$. La Figura muestra el comportamiento de los tres vectores en el sistema inercial para los casos de trompo simétrico alargado y achatado (se escogió un valor positivo para Ω_3):



Videos

<https://www.youtube.com/watch?v=-2cMmwIKTJM>

<https://www.youtube.com/watch?v=s9wiRjUKctU>

<https://www.youtube.com/watch?v=PDLXVSkDFVk>