Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 18

31 de mayo de 2021

Transformada de Legendre. Ecuaciones de Hamilton

1 Transformada de Legendre

Sea una función $F(u_1,\ ...,\ u_n;\ w_1,\ ...,\ w_m)$. Su diferencial es igual a

$$dF \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_k}\, du_k \ + \ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial w_j}\, dw_j$$

que podemos escribir así:

$$dF \ = \ \sum_{k=1}^{n} d\left(u_k\, \frac{\partial F}{\partial u_k}\right) - \sum_{k=1}^{n} u_k\, d\left(\frac{\partial F}{\partial u_k}\right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial w_j}\, dw_j$$

Entonces

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\, \frac{\partial F}{\partial u_k} - F\right) \ = \ \sum_{k=1}^{n} u_k\, d\left(\frac{\partial F}{\partial u_k}\right) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial w_j}\, dw_j \tag{1}$$

Definamos

$$v_k(u, w) \equiv \frac{\partial F}{\partial u_k} \tag{2}$$

Si la relación entre las v_k's y las u_k's es inversible, lo que ocurre si la matriz Hessiana de F es inversible:

$$\det\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_k}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_i\, \partial u_k}\right) \neq 0 \ ,$$

entonces podremos ver las u_k's como funciones de las v_k's, y definir

$$G(v,w) \equiv \sum_{k=1}^{n}\ u_k(v,w)\ v_k - F(u(v,w),w) \tag{3}$$

De esta forma la ecuación (1) dice que

$$dG = \sum_{k=1}^{n}\ u_k\ dv_k - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial w_j}\ dw_j$$

es decir,

$$\frac{\partial G}{\partial v_k} = u_k \ , \qquad\qquad \frac{\partial G}{\partial w_j} = -\frac{\partial F}{\partial w_j}$$

Si nos abstraemos de las variables w_j's, que no participan en la transformación (son variables *pasivas*), las relaciones

$$v_k = \frac{\partial F}{\partial u_k} \ , \qquad\qquad u_k = \frac{\partial G}{\partial v_k} \ ,$$

exhiben una notable dualidad entre la función F y su **transformada de Legendre** G. Las nuevas variables son las derivadas de la vieja función respecto de las viejas variables; a su vez las viejas variables son las derivadas de la nueva función respecto de las nuevas variables. Pero "viejo" y "nuevo" son intercambiables porque así como G es la transformada de Legendre de F, también F es la transformada de Legendre de G, como resulta de la ecuación (3).

Ejemplo: la *energía interna* U de un sistema termodinámico simple puede verse como una función $U(S,V)$ de la entropía S y del volumen V tal que $dU = T\ dS - p\ dV$, es decir

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T \ , \qquad \frac{\partial U}{\partial V} = -p \ .$$

En Termodinámica se define la *energía libre de Helmholtz* $F(T,V)$ como la transformada de Legendre de U respecto de la variable S, cambiada de signo

$$-F(T,V) \equiv TS - U$$

que cumple

$$-\frac{\partial F}{\partial T} = S \ , \qquad -\frac{\partial F}{\partial V} = p$$

Otros potenciales termodinámicos, como la entalpía o la energía de Gibbs, se definen en forma similar intercambiando distintos pares de variables.

2 La función Hamiltoniana

En Mecánica Analítica los sistemas físicos son descriptos mediante una función Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ a partir de la que se definen los momentos canónicamente conjugados,

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \ ,$$

en términos de los cuales las ecuaciones dinámicas de Lagrange se escriben

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial q_\mu} \ . \tag{4}$$

La definición de los momentos conjugados puede verse como el primer paso para introducir una transformada de Legendre, esto es la definición de las variables "nuevas".[1] Entonces definimos la función Hamiltoniana $H(q, p, t)$ de un sistema físico como la transformada de Legendre del Lagrangiano $L(q,\ \dot{q},\ t)$ respecto de las velocidades generalizadas $\dot{q}_\mu$,

$$H(q, p, t) \equiv \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu\ \dot{q}_\mu(q, p, t) - L(q,\ \dot{q}(q, p, t),\ t) \tag{5}$$

Debido a la relación entre variables nuevas y viejas, resulta que

$$\dot{q}_\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \ .$$

Con respecto a las variables pasivas de la transformación (es decir, q, t), tendremos

$$\frac{\partial H}{\partial q_\mu} = -\frac{\partial L}{\partial q_\mu} \ , \qquad\qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \ . \tag{6}$$

Entonces las ecuaciones dinámicas de Lagrange en términos de H se escriben como $\dot{p}_\mu = -\partial H/\partial q_\mu$. Las $2n$ ecuaciones

$$\boxed{\dot{q}_\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \ , \qquad\qquad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \ , \qquad\qquad \mu = 1,\ \ldots,\ n} \tag{7}$$

se denominan **ecuaciones canónicas de Hamilton** (1834).

Nota: La cantidad H no es otra cosa que la magnitud que se conserva cuando el Lagrangiano no depende explícitamente de t (de acuerdo con (6), la función Hamiltoniana tampoco dependerá explícitamente de t en ese caso), y que coincide con la energía mecánica en muchos casos. Más allá de su valor numérico en cada instante –que no depende de que se lo calcule usando las $\dot{q}$'s o los p's–, para la formulación de las ecuaciones de Hamilton es fundamental que H esté escrito en función de las p's, que son las variables "nuevas" de la transformación.

[1] Recordemos que $\det(\partial^2 L/\partial\dot{q}_\mu \partial\dot{q}_\nu) \neq 0$ para que sea posible escribir $\dot{q}_\mu = \dot{q}_\mu(q, p, t)$.

3 Evolución en el espacio de las fases

¿Qué tienen de notable las ecuaciones de Hamilton? Hemos pasado de las n ecuaciones de Lagrange, que son ecuaciones de segundo orden para las incógnitas $q_\mu(t)$, a un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden para las incógnitas $q_\mu(t)$, $p_\mu(t)$. En principio, siempre es posible hacer una conversión de este tipo agregando variables (en este caso las p_μ's). Lo realmente sorprendente y bello es que la conversión de n ecuaciones de segundo orden a $2n$ ecuaciones de primer orden se ha logrado de tal forma que las derivadas de las **variables canónicas** (q_μ, p_μ) están despejadas en las ecuaciones de Hamilton (el Hamiltoniano H no contiene derivadas de q o p).

Si representamos la evolución del sistema en el **espacio de las fases**, que es el espacio de $2n$ dimensiones definido por las variables canónicas (q_μ, p_μ), como una curva $(q_\mu(t), p_\mu(t))$ parametrizada por el tiempo t entonces el "vector" de $2n$ componentes tangente a la curva es $(\dot{q}_\mu, \dot{p}_\mu)$.[2] Pero sucede que ese vector es dado por la simple derivación del Hamiltoniano del sistema, como enseñan las ecuaciones de Hamilton. Esto significa que en cada punto del espacio de las fases (cada punto representa un *estado* del sistema) conocemos hacia dónde evolucionará el sistema porque esa evolución está escrita en los valores de las derivadas de H en ese punto:

$$(\dot{q}_1,\ ...,\ \dot{q}_n,\ \dot{p}_1,\ ...,\ \dot{p}_n) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1},\ ...,\ \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\ \frac{\partial H}{\partial q_1},\ ...,\ -\ \frac{\partial H}{\partial q_n}\right)$$

Este vector tangente es único en cada punto, lo que significa que las evoluciones en el espacio de las fases no se cruzan (salvo en puntos singulares, como veremos). Por lo tanto las posibles evoluciones del sistema se ven en el espacio de las fases como si fueran líneas de un fluido cuya "velocidad" en cada punto queda definida por la ecuación anterior.

3.1 Ejemplos: sistemas conservativos de 1 grado de libertad

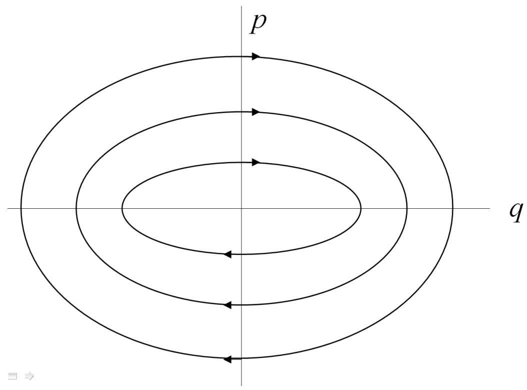
Las evoluciones en el espacio de las fases de los sistemas conservativos de 1 grado de libertad se obtienen inmediatamente como las curvas $H(q,p) = cte.$, ya que esa única integral de movimiento determinará completamente la evolución a partir de cada posible configuración inicial $(q(0), p(0))$.

3.1.1 Oscilador armónico

$$p = m\dot{q}\ , \qquad\qquad H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}\ q^2$$

En el espacio de las fases, las curvas $H(q,p) = cte.$ son elipses que rodean el punto de equilibrio estable $q = 0 = p$. El vector tangente a las curvas es

$$(\dot{q},\ \dot{p}) = (\frac{p}{m}, -kq)$$



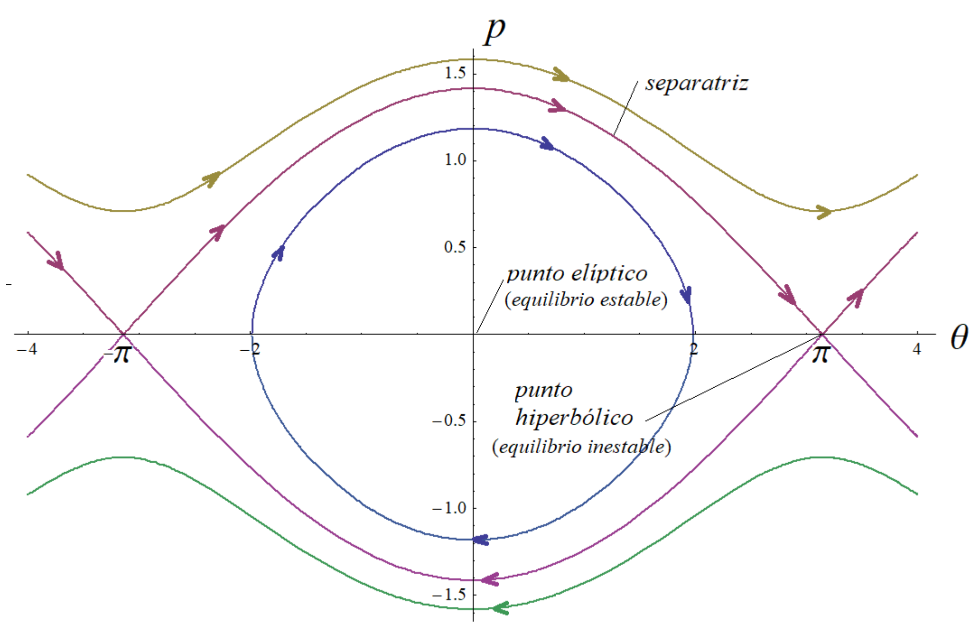
3.1.2 Péndulo simple

$$p = m\ell^2\dot{\theta}\ , \qquad\qquad H(q,p) = \frac{p^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos\theta$$

El vector tangente a las curvas es

$$(\dot{q},\ \dot{p}) = (\frac{p}{m\ell^2}, -mg\ell\sin\theta)\ ,$$

y se anula en los puntos de equilibrio. Las curvas $H(q,p) = cte.$ muestran los dos tipos de movimiento del péndulo: **libración** ($\dot{\theta}$ cambia de signo) en línea azul, y **rotación** ($\dot{\theta}$ no cambia de signo) en línea verde.



La *separatriz* entre ambos tipos de comportamiento es la curva $H = mg\ell$.

[2] Del mismo modo que el vector $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ es tangente a la trayectoria de una partícula en el espacio físico de tres dimensiones.

4 Conservación de H

Como mencionamos, el formalismo Lagrangiano nos enseña que H se conserva cuando $\partial L/\partial t = 0$, que según (6) significa que H no depende explícitamente del tiempo. Pero veamos la conservación de H a la luz de las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\, \dot{q}_\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\, \dot{p}_\mu \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\, \frac{\partial H}{\partial p_\mu} - \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\, \frac{\partial H}{\partial q_\mu} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}$$

es decir

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{8}$$

Aunque esta ecuación no es independiente de las ecuaciones de Hamilton (7) sino que es una consecuencia de las mismas, no deja de llamar la atención que t y H quedan relacionadas de la misma manera en que lo hacen los **pares de variables conjugadas** (q_μ, p_μ) en las ecuaciones de Hamilton. Aunque el tiempo t no es una variable dinámica sino el parámetro respecto del cual se describe la evolución del sistema, podría decirse que en algún sentido t y H forman también un par de "variables conjugadas" .[3]

5 Coordenadas cíclicas

Las ecuaciones de Hamilton muestran que

–Si q_μ es cíclica en el Hamiltoniano $H(q,p,t)$ entonces se conserva p_μ

–Si p_μ es cíclica en el Hamiltoniano $H(q,p,t)$ entonces se conserva q_μ

En virtud de (8) puede agregarse: si t es cíclica en $H(q,p,t)$ entonces se conserva H.

[3]El tiempo puede incorporarse al conjunto de variables canónicas, al precio de introducir un vínculo entre las variables a la hora de variar la acción. Esta estrategia llamada *parametrización* es útil para tratar un sistema no conservativo como si fuese formalmente conservativo (ver Lanczos, Cap. IV, Secc. 10).