Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 20
7 de junio de 2021

Transformaciones canónicas

1 Transformaciones canónicas

Llamamos transformaciones canónicas a los cambios de variables en el espacio de las fases,

$$(q_\mu,\ p_\mu) \quad \longrightarrow \quad (Q_\mu(q_\mu, p_\mu, t),\ P_\mu(q_\mu, p_\mu, t))\,,$$

que mantienen la forma de las ecuaciones de Hamilton. Como ya vimos, este tipo de cambio de variables involucra una matriz simpléctica $\mathbf{M}$ cuyas componentes corresponden a las derivadas de las variables nuevas respecto de las variables viejas. El carácter simpléctico que debe tener la matriz del cambio de variables nos da una manera de verificar si la transformación es canónica o no. Ahora veremos un método para construir transformaciones canónicas.

Para que las ecuaciones de Hamilton tengan la misma forma tanto en las viejas como en las nuevas variables, la acción debe tener la forma canónica en ambos juegos de variables:

$$\sum_{\mu=1}^{n} p_\mu\ dq_\mu - H(q,p,t)\ dt = \sum_{\mu=1}^{n} P_\mu\ dQ_\mu - \overline{H}(Q,P,t)\ dt + dF \tag{1}$$

donde dF es un término de borde que no altera la forma de las ecuaciones. Nótese que la propia expresión indica que debe verse a F como una función $F(q,Q,t)$ pues

$$dF = \sum_{\mu=1}^{n}(p_\mu\ dq_\mu - P_\mu\ dQ_\mu) - (H - \overline{H})dt \tag{2}$$

Entonces

$$p_\mu = \frac{\partial F}{\partial q_\mu}\ , \qquad\qquad P_\mu = -\frac{\partial F}{\partial Q_\mu}\ , \qquad\qquad \overline{H} - H = \frac{\partial F}{\partial t} \tag{3}$$

Esto significa que podemos generar una transformación canónica mediante la elección de una **función generatriz** $F(q,Q,t)$; luego la ecuación (3) define una transformación $p_\mu = p_\mu(q,Q,t)$; $P_\mu = P_\mu(q,Q,t)$ que automáticamente es canónica. Para que el cambio de variables esté bien definido tiene que ser biyectivo, es decir, tiene que ser inversible para despejar las coordenadas nuevas en función de las viejas y viceversa.

Ejemplo: sea $F(q,Q) = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu Q_\nu$, entonces $p_\mu = Q_\mu$, $P_\mu = -q_\mu$ es una transformación canónica. Evidentemente lo es, ya que es tan sólo un intercambio de los roles entre coordenadas y momentos conjugados. Las ecuaciones de Hamilton no sufrirán cambios de forma, porque coordenadas y momentos aparecen en pie de igualdad en esas ecuaciones.

A diferencia de lo visto en la clase pasada, ahora estamos permitiendo que la transformación canónica dependa del tiempo. Esto no incide en la forma que debe tener la relación entre variables viejas y nuevas para que la transformación sea canónica; simplemente las dos primeras ecuaciones en (3) contienen ahora un parámetro t. Por lo tanto, no se alteran las propiedades de la matriz $\mathbf{M}$, que se construye con las derivadas de las coordenadas nuevas respecto de las viejas. En particular no se altera la invariancia del corchete de Poisson, ni la invariancia del volumen canónico (que resulta de $\det \mathbf{M} = 1$) o el resto de los invariantes de Poincaré.[1] La presencia de t en la función generatriz F introducirá una dependencia temporal adicional en la evolución de las nuevas variables canónicas que será absorbida por el reemplazo de H por $\overline{H}$, como muestra la tercera ecuación de (3), manteniendo así la forma de las ecuaciones de Hamilton.

2 Tipos de funciones generatrices

La forma de la ecuación (2) nos indujo a considerar (q,Q) como las variables independientes de la generatriz F. Pero pueden considerarse otros tipos de dependencia funcional. Por eso llamaremos $F_1(q,Q,t)$ a ese primer tipo de función generatriz. Sin embargo podemos considerar otras dependencias funcionales, siempre combinando una variable "vieja" con otra "nueva". Por ejemplo, si reemplazamos

$$P_\mu \, dQ_\mu = d(P_\mu Q_\mu) - Q_\mu \, dP_\mu$$

en la ecuación (2) obtenemos

[1] Nótese que $\sum(p_\mu dq_\mu - P_\mu dQ_\mu) = \sum(\frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q_\mu} dq_\mu + \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial Q_\mu} dQ_\mu)$ es un diferencial exacto en el espacio de las fases. Por lo tanto, si a un dado t integramos sobre un camino cerrado del espacio de las fases obtendremos una invariancia,

$$\oint \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \, dq_\mu = \oint \sum_{\mu=1}^{n} P_\mu \, dQ_\mu$$

que equivale a la invariancia del primer invariante de Poincaré $\mathcal{J}_1$.

$$d\left(F+\sum_{\mu=1}^{n} P_\mu Q_\mu\right)=\sum_{\mu=1}^{n}(p_\mu\ dq_\mu+Q_\mu\ dP_\mu)-(H-\overline{H})dt$$

La función diferenciada en el primer miembro es una transformada de Legendre de $-F$. Como se ve a la derecha, es una función de (q,P,t). Diremos que se trata de una transformación de tipo 2. Así, eligiendo una función $F_2(q,P,t)$ queda definida una transformación canónica a través de las relaciones

$$p_\mu=\frac{\partial F_2}{\partial q_\mu}\ ,\qquad Q_\mu=\frac{\partial F_2}{\partial P_\mu}\ ,\qquad \overline{H}-H=\frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Como siempre, es necesario que las relaciones entre coordenadas nuevas y viejas sea inversible.

Ejemplo: sea

$$F_2(q,P,t)=\sum_{\nu=1}^{n}\ f_\nu(q,t)\ P_\nu$$

entonces

$$p_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}\ \frac{\partial f_\nu}{\partial q_\mu}\ P_\nu\ ,\qquad Q_\mu=f_\mu(q,t)$$

que es una transformación de punto –las Q's dependen sólo de las q's– dependiente del tiempo. La dependencia temporal explícita de las nuevas variables impone un cambio de Hamiltoniano:

$$\overline{H}=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}=H+\sum_{\nu=1}^{n}\ \frac{\partial f_\nu}{\partial t}\ P_\nu\equiv H+\sum_{\nu=1}^{n}\ g_\nu(Q,t)\ P_\nu$$

Si $f_\nu(q)=q_\nu$ resulta la transformación **identidad**: $p_\mu=P_\mu$, $Q_\mu=q_\mu$.

El truco usado para construir una generatriz tipo 2 se puede repetir para obtener generatrices $F_3(p,Q,t)$ y $F_4(p,P,t)$. Si en (2) ahora reemplazamos

$$p_\mu\ dq_\mu=d(p_\mu q_\mu)-q_\mu\ dp_\mu$$

obtendremos

$$d\left(F-\sum_{\mu=1}^{n} p_\mu q_\mu\right)=\sum_{\mu=1}^{n}(-q_\mu\ dp_\mu-P_\mu\ dQ_\mu)-(H-\overline{H})dt$$

La función diferenciada a la izquierda es F_3. Según vemos a la derecha, depende de (p, Q, t), y se cumple

$$-q_\mu = \frac{\partial F_3}{\partial p_\mu}\ , \qquad -P_\mu = \frac{\partial F_3}{\partial Q_\mu}\ , \qquad \overline{H} - H = \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

Finalmente, la generatriz de tipo 4 aparece cuando combinamos ambos reemplazos en (2):

$$d\left(F - \sum_{\mu=1}^{n}(p_\mu q_\mu + P_\mu Q_\mu)\right) = \sum_{\mu=1}^{n}(-q_\mu\ dp_\mu + Q_\mu\ dP_\mu) - (H - \overline{H})dt$$

La función F_4 diferenciada a la izquierda depende sólo de (p, P, t), como se ve a la derecha. Así resulta que una transformación canónica también puede generarse eligiendo una $F_4(p, P, t)$ y empleando las relaciones

$$-q_\mu = \frac{\partial F_4}{\partial p_\mu}\ , \qquad Q_\mu = \frac{\partial F_4}{\partial P_\mu}\ , \qquad \overline{H} - H = \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

3 Transformaciones infinitesimales

Si agregamos un término infinitesimal a la generatriz de la transformación identidad tendremos una transformación canónica infinitesimal:

$$F_2(q, P, t) = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\ P_\nu + \varepsilon\ G(q, P, t)$$

donde ε es un parámetro infinitesimal. La transformación resulta

$$\begin{aligned} Q_\mu &= \frac{\partial F_2}{\partial P_\mu} = q_\mu + \varepsilon\ \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial P_\mu}\ , \\ p_\mu &= \frac{\partial F_2}{\partial q_\mu} = P_\mu + \varepsilon\ \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_\mu} \end{aligned}$$

Al orden más bajo en ε, no cometeremos error si sustituimos P por p como argumento de G. En ese caso, si elegimos una función $G(q, p, t)$ entonces la transformación infinitesimal

$$\begin{aligned} Q_\mu &= q_\mu + \varepsilon\ \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p_\mu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ P_\mu &= p_\mu - \varepsilon\ \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial q_\mu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

es una transformación canónica infinitesimal.

4 La evolución del sistema como una transformación canónica

En la transformación canónica infinitesimal que acabamos de ver, elijamos

$$G(q,p,t) = H(q,p,t)\ , \qquad\qquad \varepsilon = \delta t$$

y reemplacemos

$$\begin{aligned} Q_\mu &\simeq q_\mu + \delta t\, \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = q_\mu + \delta t\ \dot{q}_\mu\ , \\ P_\mu &\simeq p_\mu - \delta t\, \frac{\partial H}{\partial q_\mu} = p_\mu + \delta t\ \dot{p}_\mu\ , \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} Q_\mu(t) &\simeq q_\mu(t+\delta t)\ , \\ P_\mu(t) &\simeq p_\mu(t+\delta t)\ . \end{aligned}$$

Esto significa que la evolución del sistema puede verse como una sucesión de transformaciones canónicas infinitesimales cuyo generador G es el Hamiltoniano H. En efecto, la transformación canónica $(q,p)\to(Q,P)$ en el instante t nos da por resultado el valor de las variables viejas en el instante $t+\delta t$.

4.1 Teorema de Liouville

Como la evolución del sistema en el espacio de las fases puede verse como el resultado de una transformación canónica entonces satisface las propiedades de estas transformaciones. Como el volumen canónico en el espacio de las fases es un invariante de toda transformación canónica, entonces se cumple que si a $t=t_o$ consideramos un conjunto de estados iniciales que llenan una cierta región del espacio de las fases, los respectivos estados finales a $t=t_f$ llenarán una región de igual volumen canónico.

5 Relación entre simetría y conservación

Una transformación canónica infinitesimal cambia infinitesimalmente el valor de una magnitud $f(q,p,t)$:

$$\delta f = \sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\mu}\ \delta q_\mu + \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\ \delta p_\mu\right) = \varepsilon\ \sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\mu}\ \frac{\partial G}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\ \frac{\partial G}{\partial q_\mu}\right) = \varepsilon\ \{f,G\}$$

Diremos que una transformación canónica infinitesimal es una **simetría** del Hamiltoniano si

$$\delta H = 0\ ,$$

es decir, si

$$\{H,G\} = 0\ .$$

Por otro lado sabemos que una magnitud $G(q,p)$ es una constante de movimiento si $\{G,H\} = 0$. Entonces concluimos que las constantes de movimiento generan simetrías del Hamiltoniano.