Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

**MECÁNICA CLÁSICA**

**Profesor: Rafael Ferraro**

**Clase 21**

10 de junio de 2021

**Ecuación de Hamilton-Jacobi**

# 1 Integrabilidad

Hasta ahora vimos varios ejemplos de sistemas cuyas ecuaciones de movimiento pueden ser integradas. Por ejemplo, sistemas conservativos de un único grado de libertad, osciladores lineales acoplados, etc. En el sistema de dos cuerpos vimos cómo valernos de las magnitudes conservadas para resolver la dinámica en términos de *cuadraturas*, donde la solución queda expresada mediante integrales que pueden ser conocidas o no, pero que en el peor de los casos se pueden evaluar numéricamente. Esto puede crear la falsa idea de que todos los sistemas Hamiltonianos son integrables. Pero la integrabilidad de las ecuaciones de Hamilton no está garantizada en general, y no existe un método para chequear la integrabilidad de un dado Hamiltoniano. Aun así, contamos con el siguiente criterio que es satisfecho por todos los sistemas integrables conocidos:

### Integrabilidad de Liouville

Si en un sistema Hamiltoniano autónomo (se dice así cuando $H$ no depende explícitamente de $t$) de $n$ grados de libertad se conocen $n$ primeras integrales[1] $f_\mu(q,p)$ independientes[2] en *involución*, es decir

$$\{f_\mu(q,p)\ ,\ f_\nu(q,p)\} = 0\ ,$$

entonces el sistema es integrable.

[1]Una *primera integral* o *integral de movimiento* es una magnitud $f(q,p)$ que no depende explícitamente del tiempo, y se conserva durante la evolución del sistema (es decir que $\{f, H\} = 0$). No toda constante de movimiento es una primera integral; por ejemplo en el movimiento de partícula libre se conserva $q - (p/m)t$, que no es una primera integral.

[2]Las formas diferenciales $df_\mu$ son linealmente independientes.

Bajo esas condiciones será posible encontrar una transformación canónica $(q,p) \to (Q,P)$ tal que

$$P_\mu = f_\mu(q,p)$$

Como las $f_\mu$'s son conservadas, el Hamiltoniano $\overline{H} = H$ no podrá depender de las $Q_\mu$'s para satisfacer que $\dot{P}_\mu = -\partial\overline{H}/\partial Q_\mu = 0$. Por otro lado tendremos que las $\dot{Q}_\mu$'s son constantes de movimiento pues

$$\dot{Q}_\mu = \frac{\partial\overline{H}(P)}{\partial P_\mu} = \dot{Q}_\mu(P) \equiv \nu_\mu$$

Entonces las soluciones $Q_\mu(t)$ son

$$Q_\mu(t) = \nu_\mu\, t + Q_{\mu\ o}$$

(evolución uniforme sobre rectas del espacio de configuración descripto por las $Q_\mu$'s).

Por supuesto, la dificultad reside en encontrar las $f_\mu(q,p)$ y la transformación canónica respectiva.

## 2 Ecuación de Hamilton-Jacobi

Una estrategia para resolver las ecuaciones de Hamilton consiste en buscar una transformación canónica $(q,p) \to (Q(q,p,t),\ P(q,p,t))$ que lleve el Hamiltoniano $\overline{H}(Q,P,t)$ a una forma simple. Así podríamos pedir que la transformación canónica anule $\overline{H}$:

$$H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Si la generatriz es de tipo 1 o 2, se cumple que

$$p_\mu = \frac{\partial F}{\partial q_\mu}\ .$$

Como estas dos ecuaciones recuerdan las derivadas de la función principal de Hamilton, se acostumbra dar el nombre de $S$ a la generatriz. Entonces, combinando ambas ecuaciones, escribimos

$$\boxed{H\left(q_\mu, \frac{\partial S}{\partial q_\mu}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \qquad (1)$$

que conocemos como **ecuación de Hamilton-Jacobi**. Pero mientras la función principal de Hamilton $S(q_1,t_1;q_2,t_2)$ está sujeta a un doble juego de ecuaciones –un juego para la configuración final y otro para la inicial– la ecuación (1) admite una variedad mucho más amplia de soluciones. Por tratarse de una ecuación diferencial en derivadas parciales de $n+1$ variables $(q_\mu, t)$, sus soluciones pueden poseer hasta $n+1$ constantes de integración arbitrarias; en ese caso se dice que la solución es **completa**. Una de las constantes de integración es necesariamente aditiva, pues si $S(q,t)$ es solución de (1) también lo es $S(q,t) + cte$. Nos interesa obtener soluciones completas porque las restantes $n$ constantes de integración de la solución completa serán vistas como las variables $P_\mu$'s de la generatriz $S(q,P,t)$ de la transformación canónica que lleva a $\overline{H} = 0$ (la constante de integración aditiva no juega ningún papel en esa transformación).[3]

Nótese que $\overline{H} = 0$ implica que las nuevas variables son constantes de movimiento ($\dot{Q}_\mu = 0 = \dot{P}_\mu$). Por lo tanto la resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi nos llevará a encontrar $2n$ constantes de movimiento que evidentemente no pueden ser sino combinaciones de los $2n$ valores iniciales de las viejas variables, que caracterizan completamente cada solución de las ecuaciones de Hamilton. Una vez hallada la solución completa $S(q,P,t)$, escribiremos la transformación canónica correspondiente,

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q_\mu} \ , \qquad Q_\mu = \frac{\partial S}{\partial P_\mu} \ , \qquad \overline{H} = 0 \ ,$$

de donde despejaremos

$$q_\mu = q_\mu(Q,P,t) \ , \qquad p_\mu = p_\mu(Q,P,t) \ .$$

Como $(Q_\mu, P_\mu)$ son constantes de movimiento de la evolución real del sistema, entonces las relaciones anteriores nos dan directamente las soluciones $q_\mu(t)$, $p_\mu(t)$ de las ecuaciones de Hamilton en las variables originales.

En suma, el problema de resolver las $2n$ ecuaciones de Hamilton puede ser reemplazado por el problema de encontrar una única función $S(q,P,t)$. Sin embargo para que la solución $S(q,P,t)$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi pueda usarse como generatriz de una transformación canónica que lleve a $\overline{H} = 0$ deberá ser una solución completa, en el sentido que deberá contener $n$ constantes de integración no aditivas que pasarán a jugar el papel de las $P_\mu$'s de la transformación canónica.[4] En realidad, la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser tan difícil de resolver como las ecuaciones de Hamilton, pero veremos luego que nos proveerá de herramientas para tratar perturbativamente sistemas que estén "próximos" a un caso integrable. La importancia de las ideas de Hamilton y Jacobi reside en que abrieron nuevas perspectivas para entender el funcionamiento de los sistemas físicos.

[3] Llamando $P_\mu$'s a las constantes de integración estamos dando el carácter de generatriz de tipo 2 a la solución $S(q,P,t)$. Algunos autores llaman $Q_\mu$'s a las constantes de integración; de esa forma la solución $S(q,Q,t)$ es vista como una generatriz de tipo 1.

[4] $\det[\partial^2 S/\partial q_\mu \partial P_\nu] \neq 0$ para que el cambio de variables sea inversible.

# 3 Sistema conservativo de 1 grado de libertad

Ejemplificaremos el procedimiento a seguir mediante el oscilador armónico. La ecuación de Hamilton-Jacobi en ese caso es

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Siempre que el sistema sea autónomo ($H$ no depende explícitamente de $t$) la solución se puede plantear como[5]

$$S(q_\mu, P_\mu, t) = S_o(q_\mu, P_\mu) - E\ t$$

donde $E$ es una de las $n$ constantes de integración de la solución completa, digamos $P_n \equiv E$, o es una combinación de las mismas $E = E(P_\mu)$ (esto depende de cómo se organice el conjunto de constantes de integración). En los casos de un único grado de libertad, $E$ es la única constante de integración. Entonces la ecuación de Hamilton-Jacobi toma la forma

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_o}{dq}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} = E$$

que se integra por cuadraturas,

$$S_o = \int \sqrt{2m\left(E - \frac{kq^2}{2}\right)}\, dq$$

(elegimos el signo correspondiente a $p = \partial S/\partial q > 0$).

Ahora haremos la transformación canónica, para lo cual la constante de integración $E$ será vista como una de las variables de la generatriz:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_o}{\partial q} = \sqrt{2m\left(E - \frac{kq^2}{2}\right)}\ , \qquad\qquad Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_o}{\partial E} - t\ ,$$

entonces

$$t + Q = \frac{\partial S_o}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E}\int \sqrt{2m(E - \frac{kq^2}{2})}\, dq = m \int \frac{dq}{\sqrt{2m(E - \frac{kq^2}{2})}} = \omega_o^{-1} \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}\ q\right)$$

de donde resulta

$$q = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \omega_o (t + Q) \tag{2}$$

Además se obtiene

$$p = \sqrt{2mE} \cos \omega_o (t + Q) \tag{3}$$

[5]Siempre que una coordenada $q$ sea cíclica en el Hamiltoniano, la dependencia de $S$ en $q$ será lineal. El factor que acompañe a $q$ será una de las constantes de integración $P$'s.

Como fue dicho, cuando el sistema evoluciona las nuevas variables $Q$ y $P = E$ permanecen constantes. Por lo tanto las expresiones obtenidas para $q, p$ automáticamente dan las funciones $q(t)$, $p(t)$ que resuelven las ecuaciones de Hamilton.

### Invariancia del área

Las transformaciones canónicas preservan el volumen canónico. Si el sistema tiene un único grado de libertad, el espacio de las fases tiene 2 dimensiones y el volumen deviene en un área. Consideremos el área delimitada por la curva $H(q,p) = E$, que es una elipse en coordenadas $q, p$. El área de una elipse es $\pi$ por el producto de los semiejes. Como los semiejes corresponden a las amplitudes de $q, p$, el área es

$$\acute{A}rea = \pi \sqrt{\frac{2E}{k}}\, \sqrt{2mE} = \frac{2\pi}{\omega_o}\, E$$

En las nuevas variables la elipse $H(q,p) = E$ devino en la recta $P = E$, que no encierra ninguna área. ¿Qué significa la invariancia del área en este caso? Debemos entender que, en cada $t$, la transformación canónica (2)-(3) es univaluada si $0 \leq \omega_o(t+Q) < 2\pi$. Es decir que la univaluación de la transformación de variables limita el rango de $Q$ a $\Delta Q = 2\pi/\omega_o$. Entonces, los puntos interiores de la elipse, que corresponden a energías que van desde 0 hasta $E$ ($\Delta P = E$) son mapeados a un rectángulo de altura $E$ y base $2\pi/\omega_o$, cuya área coincide con la de la elipse.[6]

# 4 Separación de variables

En sistemas conservativos de $n > 1$ grados de libertad, el método para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi, cuando esto sea posible, consiste en encontrar coordenadas adecuadas para **separar** la ecuación en $n$ ecuaciones de primer orden que dependan de una **única coordenada**, las que se integrarán por cuadraturas. Por ejemplo, el problema de una partícula en un campo central es separable en coordenadas esféricas; en efecto,

$$T = \frac{m}{2}\, \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2\right),$$

$$p_r = m\dot{r}\ , \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta}\ , \qquad p_\phi = mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}$$

$$H = \frac{1}{2m}\, \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + V(r)$$

[6] El centro de la elipse, $q = 0 = p$, es un punto singular de la transformación pues es mapeado a la recta $P = 0$.

La ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\frac{1}{2m}\ \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right] + V(r) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Para intentar separar la ecuación proponemos la solución (nótese que $\phi, t$ son cíclicas)

$$S = S_r(r) + S_\theta(\theta) + \alpha_\phi\ \phi - E\ t$$

Entonces reemplazando,

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta} = 2mr^2[E - V(r)] - r^2\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2$$

donde quedan igualadas una función de $\theta$ con una función de $r$ (en esto consiste el arte de *separar* la ecuación). La única forma de dar sentido a esta ecuación es que cada miembro sea una misma constante; entonces tendremos dos ecuaciones de primer orden en una sola variable,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta} &= \alpha_\theta^2\ , \\ 2mr^2[E - V(r)] - r^2\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 &= \alpha_\theta^2\ ,\end{aligned}$$

que se integran por cuadraturas.