Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 22
14 de junio de 2021

Variables ángulo-acción

1 Variables ángulo-acción

La solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi $S(q, P, t)$ se utiliza como generatriz de una transformación canónica que lleva a Hamiltoniano $\overline{H}$ nulo. En tal caso, las nuevas variables Q_μ, P_μ se conservan. Si el sistema es conservativo la solución tiene la forma $S = S_o(q, P) - E(P)\, t$, donde E es una de las n constantes de integración P_μ's de la solución completa (suele elegirse $E \equiv P_n$) o es una combinación de ellas. La función $S_o(q, P)$ debe satisfacer la ecuación

$$H\left(q_\mu, \frac{\partial S_o}{\partial q_\mu}\right) = E \ . \tag{1}$$

Sin en lugar de S usamos $S_o(q, P)$ como generatriz de una transformación canónica,

$$p_\mu = \frac{\partial S_o}{\partial q_\mu} \ , \qquad Q_\mu = \frac{\partial S_o}{\partial P_\mu} \ , \qquad \overline{H} = H \ , \tag{2}$$

entonces la ecuación (1) dice que

$$H\left(q_\mu, p_\mu\right) = E(P_1, ..., P_n)$$

y las ecuaciones de Hamilton en las nuevas variables de la transformación generada por $S_o(q, P)$ son

$$\dot{Q}_\mu = \frac{\partial H}{\partial P_\mu} = \frac{\partial E}{\partial P_\mu} \,, \qquad\qquad \dot{P}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial Q_\mu} = -\frac{\partial E}{\partial Q_\mu} = 0 \;.$$

Vemos que las P_μ's se conservan. Entonces las $\dot{Q}_\mu$ también son constantes de movimiento, pues E es una función de las P_μ's conservadas. Las Q_μ evolucionan uniformemente,[1]

$$Q_\mu(t) = \nu_\mu \; t + Q_{\mu \; o} \qquad\qquad \text{donde} \qquad\qquad \nu_\mu \equiv \frac{\partial E}{\partial P_\mu} \;. \tag{3}$$

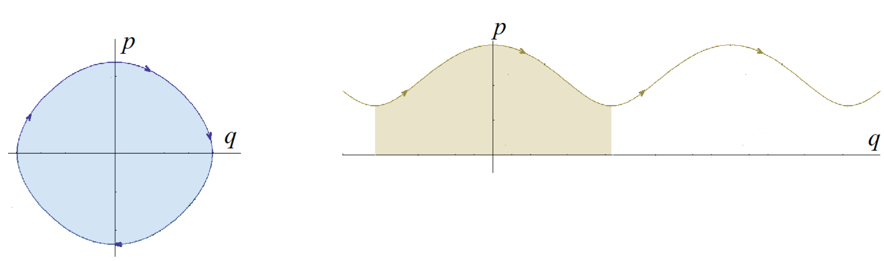
Supongamos que la ecuación (1) ha sido integrada mediante separación de variables; es decir, en coordenadas adecuadas la solución completa se escribe

$$S_o = \sum_{\mu=1}^{n} \; S_\mu(q_\mu, P_1, ..., P_{n-1}, P_n) \;,$$

donde cada término de la suma depende de una única coordenada q, y las funciones S_μ se resuelven por cuadraturas. En ese caso la transformación canónica generada por S_o cumple que el momento conjugado a q_μ,

$$p_\mu = \frac{\partial S_o}{\partial q_\mu} = p_\mu(q_\mu, P_1, ..., P_n), \qquad\qquad \mu = 1, ..., n \tag{4}$$

depende sólo de q_μ y de las constantes de integración de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Así resultan relaciones individuales para cada par de variables conjugadas. Frecuentemente estas relaciones dan curvas cerradas o periódicas en el plano (q, p) correspondiente. Por ejemplo, como vimos en el péndulo simple, podemos tener *libración* o *rotación*:



libración rotación

[1]La diferencia entre las Q_μ's generadas por S y las generadas por S_o resulta de la relación

$$\frac{\partial S_o}{\partial P_\mu} - \frac{\partial S}{\partial P_\mu} = \frac{\partial E}{\partial P_\mu} \; t = \nu_\mu \; t$$

Mientras las Q_μ's generadas por S se conservan, las generadas por S_o evolucionan uniformemente.

Si todos los pares de variables conjugadas tienen este tipo de comportamiento podemos definir magnitudes cuyos valores correspondan a las áreas sombreadas:

$$J_\mu \equiv \oint p_\mu \, dq_\mu \ , \qquad \mu = 1, ..., n$$

(en el caso de la rotación se integra en uno de los ciclos). Como cada $p_\mu = p_\mu(q_\mu, P_1, ..., P_n)$ depende sólo de su variable conjugada y las constantes de integración, entonces las **variables acción** J_μ's dependen sólo de las constantes de integración:

$$J_\mu = J_\mu(P_1, ..., P_n) \ , \qquad \mu = 1, ..., n \ ,$$

de donde podemos despejar las P_μ's en función de las J_μ's,

$$P_\mu = P_\mu(J_1, ..., J_n) \ , \qquad \mu = 1, ..., n \ ,$$

para escribir la solución completa de la ecuación (1) como $S_o(q, J)$. Así escrita, la solución completa $S_o(q, J)$ será usada como generatriz de una transformación canónica $(q_\mu, p_\mu) \rightarrow (Q_\mu, J_\mu)$ que transforme las variables canónicas originales en las variables acción y sus respectivas conjugadas. Es costumbre llamar **variables ángulo** θ_μ a las coordenadas conjugadas a los J_μ's multiplicadas por 2π. Como vimos en (3), la solución completa de la ecuación (1) conduce siempre a variables Q_μ que evolucionan uniformemente, no importa cómo hayamos organizado el conjunto de constantes de integración. En particular esto vale también para las variables ángulo. Pero las variables ángulo gozan de propiedades adicionales.

Notemos que la transformación canónica nos entrega funciones $\theta_\mu(q, J) = 2\pi \, \partial S_o(q, J)/\partial J_\mu$. Queremos despejar las coordenadas q's como funciones $q_\mu(\theta, J)$, para entender cómo evolucionan las q_μ's, dado que sabemos cómo evolucionan las variables ángulo-acción. Nos interesa entonces conocer qué tipo de funciones son las $q_\mu(\theta, J)$. Dados los valores de las J's, los posibles estados del sistema quedan restringidos a los ciclos de la Figura anterior, cuyas áreas son determinadas por las J_μ. Para comprender la relación entre las q's y las θ's, veamos qué cambios experimenta θ_μ cuando una de las q's, digamos q_ν, varía sobre un ciclo mientras las otras q's permanecen fijas:

$$\delta_\nu \theta_\mu \ = \ \frac{\partial \theta_\mu}{\partial q_\nu} \, \delta q_\nu \ = \ 2\pi \, \frac{\partial^2 S_o}{\partial q_\nu \, \partial J_\mu} \, \delta q_\nu \ = \ 2\pi \, \frac{\partial p_\nu}{\partial J_\mu} \, \delta q_\nu$$

donde hemos usado la ecuación (2). Entonces en un ciclo de q_ν tenemos que

$$\Delta_\nu \theta_\mu \ = \ 2\pi \, \frac{\partial}{\partial J_\mu} \oint p_\nu \, dq_\nu \ = \ 2\pi \, \frac{\partial J_\nu}{\partial J_\mu} \ = \ 2\pi \, \delta_{\mu\nu} \qquad (5)$$

donde la derivada respecto de J_μ puede salir fuera de la integral porque ésta se realiza a valores fijos de las J_μ's. El resultado muestra que θ_μ avanza 2π cuando la respectiva q_μ recorre un ciclo completo, permaneciendo fijas las demás coordenadas q. Esto muestra la naturaleza multivaluada de las variables ángulo.[2] En cambio las coordenadas q_μ's son univaluadas.[3] Por lo tanto, si las coordenadas q_μ son univaluadas entonces las funciones $q_\mu(\theta, J)$ deberán ser funciones multiperiódicas de los ángulos θ con períodos 2π; si así no fuere, los incrementos en 2π sufridos por los θ's en cada ciclo afectarían los valores de las q's. Es decir que las funciones $q_\mu(\theta, J)$ se expresarán mediante una serie de Fourier de la forma

$$q_\mu(\theta, J) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} ... \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} a_{\mu\ k_1...k_n}\ e^{i\ (k_1\ \theta_1+...+k_n\ \theta_n)}$$

donde los coeficientes $a_{\mu\ k_1...k_n}$ dependen de las variables acción J. Como los momentos p_μ dependen de la respectiva q_μ y de los J's, también ellos son funciones multiperiódicas de las variables ángulo. En general, cualquier función univaluada del estado del sistema $f(q, p)$ admite un desarrollo similar al anterior.

Ejemplo

Según vimos la clase pasada, la variable acción del oscilador armónico es

$$J = \oint\ p\ dq = \textit{Área de la elipse} = \frac{2\pi}{\omega_o}\ E \tag{6}$$

y la variable ángulo es

$$\theta\ =\ 2\pi\ \frac{\partial S_o}{\partial J}\ =\ \omega_o\ \frac{\partial S_o}{\partial E}\ =\ \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}\ q\right)$$

Por lo tanto q es una función periódica de θ con período 2π:

$$q\ =\ \sqrt{\frac{2E}{k}}\ \sin\theta$$

---

[2] También la generatriz $S_o(q, J)$ es multivaluada. En cada ciclo de q_μ es

$$\Delta S_o = \oint \frac{\partial S_o}{\partial q_\mu}\ dq_\mu = \oint p_\mu\ dq_\mu = J_\mu\ .$$

$S_o(q, J)$ está determinada a menos de términos que son múltiplos de las J_μ, los que no afectan su condición de ser solución de (1).

[3] Esto vale para la libración. En la rotación, la variable univaluada es $q_\mu - \frac{\theta_\mu}{2\pi}\ q_{\mu o}$, pues q_μ avanza una cantidad fija $q_{\mu o}$ en cada ciclo.

Cuando el sistema evoluciona, las variables ángulo evolucionan uniformemente. Según la ecuación (3) resulta $\theta_\mu(t) = 2\pi\ \nu_\mu\ t + \theta_{\mu_o} = \omega_\mu\ t + \theta_{\mu_o}$. Por otro lado, las variables acción se conservan. Entonces

$$q_\mu(t) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} ... \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} A_{\mu\ k_1...k_n}\ e^{i\ (k_1\ \omega_1 + ... + k_n\ \omega_n)\ t} \tag{7}$$

y otro tanto sucede con la evolución de cualquier función univaluada del estado del sistema $f(q,p)$. En particular no sólo las coordenadas que separan la ecuación de Hamilton-Jacobi, sino cualquier tipo de coordenada canónica univaluada evolucionará de esa manera.

Estos resultados son significativos porque la propia transformación canónica nos dice cuánto valen las frecuencias $\omega_\mu = 2\pi\ \nu_\mu$ involucradas en la evolución del sistema. En efecto la ecuación (3) dice que[4]

$$\nu_\mu = \frac{\partial E(J)}{\partial J_\mu} \tag{8}$$

Por ejemplo, en el oscilador armónico la ecuación (6) dice que $\nu = \partial E/\partial J = \omega_o/(2\pi)$.

Que las frecuencias del movimiento resulten de calcular las áreas encerradas en los ciclos de las variables canónicas usadas para separar la ecuación de Hamilton-Jacobi, y de escribir la energía en función de esas áreas, es un gran logro de las variables ángulo-acción. Las variables ángulo-acción serán también indispensables para estudiar perturbativamente los sistemas aproximadamente conservativos. Los trabajos de Hamilton (1834) y Jacobi (1836) recibieron el justo reconocimiento cuando Delaunay introdujo las variables ángulo-acción en teoría de perturbaciones aplicada a mecánica celeste (1848), lo que permitió exhibir toda la potencia de la nueva formulación de la Mecánica. Las variables acción fueron utilizadas en los albores de la Mecánica Cuántica para enunciar las reglas de cuantificación de Wilson-Sommerfeld (1915) que condujeron a las *ondas de materia* de de Broglie (1924).

[4]Recordemos que usamos los J's en lugar de los P's, y así las Q's son $Q_\mu = \theta_\mu/(2\pi)$.

1.1 Ejemplo

El problema del movimiento ligado de una partícula de masa m en un campo central Kepleriano, $V(r) = -\alpha/r$, se puede separar en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) como ya hemos visto. Una vez calculadas las variables acción, se obtiene que la energía $E(J)$ resulta[5]

$$E = -\frac{2\pi^2 m\ \alpha^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^2}$$

lo que conduce a tres frecuencias iguales:

$$\nu_r = \nu_\theta = \nu_\phi = \frac{4\pi^2 m\ \alpha^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^3} = \sqrt{\frac{2}{\pi^2 m\ \alpha^2}}\ |E|^{3/2}$$

Siendo las tres frecuencias iguales entonces la ecuación (7) implica que la evolución de cada coordenada r, θ, ϕ es periódica. La órbita es cerrada, pues al cabo del tiempo $T = \nu^{-1}$ el sistema regresa al estado inicial.

Si recordamos que la relación entre E y a –el semieje mayor de la órbita elíptica– es $|E| = \alpha/(2a)$, obtenemos la 3ra. Ley de Kepler,

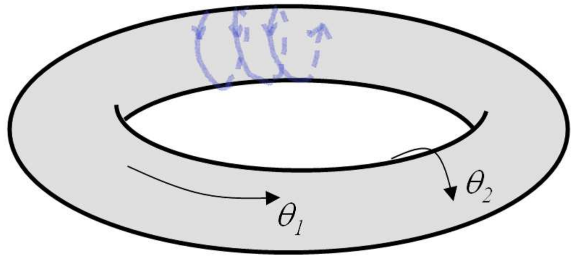
$$T^2 = \nu^{-2} = 4\ \pi^2 m\ \alpha^{-1}\ a^3.$$

2 Sistemas periódicos y condicionalmente periódicos

Las variables acción J_μ's son primeras integrales de movimiento, cuyos valores quedan determinados por las condiciones iniciales; las frecuencias ν_μ que caracterizan la evolución del sistema dependen de los valores de las variables acción. Si las frecuencias ν_μ son **conmensurables**, es decir que los cocientes entre frecuencias son racionales, entonces las ν_μ se podrán escribir como múltiplos enteros de una frecuencia ν_o (que podemos elegir como el máximo común divisor de las ν_μ's)

$$\nu_\mu = N_\mu\ \nu_o \tag{9}$$

es decir, $T_o \equiv \nu_o^{-1}$ es N_μ veces T_μ; cada período T_μ entra un número entero de veces en $T_o \equiv \nu_o^{-1}$. Por lo tanto al cabo del tiempo T_o el sistema regresará a su estado inicial. La evolución del sistema será periódica, y describirá una curva cerrada tanto en el espacio de configuración como en el espacio de las fases. De acuerdo a lo dicho a continuación de la ecuación (7), cada función univaluada del sistema evolucionará con una frecuencia que es un múltiplo de ν_o. Por ejemplo, en el problema de Kepler que acabamos de ver la conmensurabilidad de las frecuencias se da para cualquier valor de las integrales de movimiento J_μ. Si las frecuencias no son conmensurables el sistema se dice *múltiple* o *condicionalmente* periódico.



Las n integrales de movimiento J_μ's etiquetan un subespacio $n-$dimensional del espacio de las fases en donde la evolución tiene lugar. En ese subespacio evolucionan las variables ángulo, de modo que el subespacio se ve como un toro $n-$dimensional.
A medida que el sistema evoluciona, va trazando una curva sobre el toro. Si las frecuencias son conmensurables, la curva se cerrará. Si las frecuencias no son conmensurables, es decir que los cocientes entre frecuencias son irracionales, entonces la curva que desarrolla el sistema sobre el toro no se cerrará. Sin embargo, como un irracional se puede aproximar por un racional con la precisión que se desee, la evolución irá cubriendo densamente el toro. Entre estos dos casos existen situaciones intermedias; si entre las frecuencias existen m relaciones de la forma

$$\sum_{\mu=1}^{n} N_{i\mu}\ \nu_\mu = 0\ , \qquad\qquad i = 1, ..., m$$

donde los $N_{i\mu}$ son enteros, se dice que el sistema es m veces **degenerado**. En ese caso la evolución del sistema sólo llena densamente un subespacio del toro de dimensión $n - m$. Si $m = n - 1$, como en el caso (9),[6] el sistema se denomina **completamente degenerado**; el subespacio deviene unidimensional (es una curva cerrada).

Los sistemas completamente degenerados se caracterizan porque la energía E depende de las J_μ's a través de una combinación lineal de las mismas a coeficientes enteros, como sucede en el problema de Kepler y en el oscilador armónico isótropo. Esa característica lleva a que las frecuencias $\nu_\mu = \partial E/\partial J_\mu$ sean conmensurables cualquiera sea el valor de las J's, y las evoluciones siempre describan curvas cerradas.[7]

[5] Las órbitas que ocurren en el plano $\theta = \pi/2$ corresponden a $J_\theta = 0$ pues el correspondiente ciclo se reduce al punto ($\theta = \pi/2$, $p_\theta = 0$). Cuando la órbita está inclinada la coordenada θ oscila entre $\pi/2 - i$ y $\pi/2 + i$.

[6] En (9) hay $m = n$ ecuaciones. Pero una de ellas debe usarse para escribir ν_o en función de alguna de las frecuencias ν_μ del sistema.

[7] Si el sistema no es completamente degenerado, entonces las curvas cerradas sólo podrían darse para ciertas condiciones iniciales particulares. Los sistemas completamente degenerados son separables en más de un tipo de coordenadas, como ocurre con el problema de Kepler y el oscilador armónico isótropo.