Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 23
17 de junio de 2021

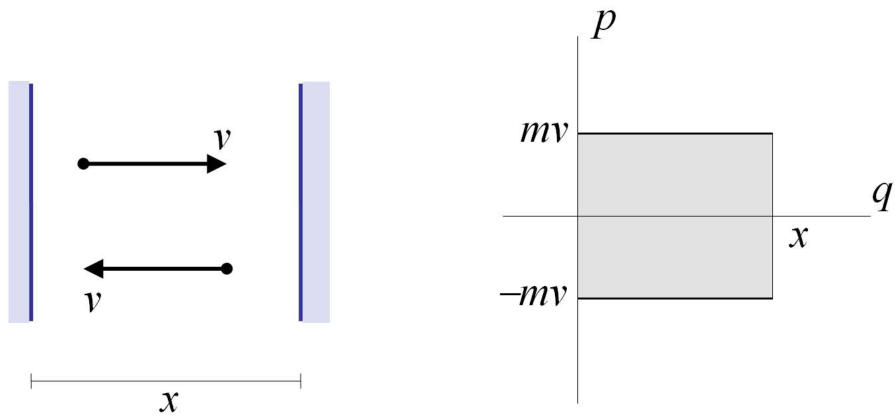
Invariantes adiabáticos

1 Invariantes adiabáticos

Las soluciones de sistemas conservativos pueden servir para obtener soluciones aproximadas de sistemas no conservativos. Si resolvemos las ecuaciones para el Hamiltoniano conservativo $H(q, p, \lambda)$, donde λ es un parámetro, podremos tener una idea de cómo sería la evolución cuando λ sea una función del tiempo $\lambda(t)$ que varía lentamente. Pero para poder precisar qué significa "lentamente", el sistema conservativo debería contener un tiempo característico. Si el sistema conservativo es periódico con período T entonces $\lambda(t)$ debería cambiar muy poco en el tiempo T; esos cambios lentos se denominan **adiabáticos**. Veremos que las variables acción son casi constantes durante un proceso adiabático.[1]

Para comenzar, mostraremos la **invariancia adiabática** de la variable acción J en un sistema periódico donde una partícula libre rebota elásticamente entre dos paredes

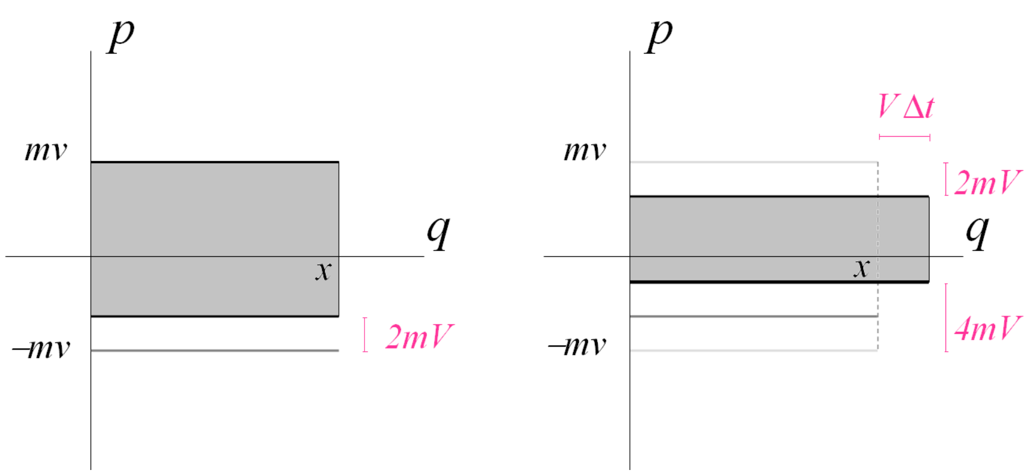
[1]No siempre la variación lenta de los parámetros implica que la solución se parece a la del problema conservativo respectivo. Como sabemos, una resonancia paramétrica puede resultar de una variación lenta pero adecuada de un parámetro. Esta cuestión se relaciona con los problemas de convergencia de los desarrollos perturbativos.



El período de este sistema es $T = 2x/v$, y el valor de la variable acción es $J = 2\ m\ v\ x$. Si ahora dejamos que una de las paredes se mueva a velocidad constante V, entonces la variable acción J resultará afectada, ya que la velocidad de la partícula cambiará al chocar contra la pared móvil, cuya posición habrá cambiado también. Además, la energía de la partícula dejará de conservarse. Sabemos que en un choque elástico se conserva la velocidad relativa, entonces en cada choque con la pared móvil tendremos que

$$v_i - V = v_f + V \qquad \Rightarrow \qquad \Delta v = -2V \qquad \text{ó} \qquad \Delta p = -2mV$$

En la siguiente Figura, x es la distancia entre paredes cuando ocurre el primer choque con la pared móvil ubicada a la derecha, y Δt es el tiempo transcurrido hasta el siguiente choque:



Para estar en condiciones adiabáticas deberemos pedir que el desplazamiento Δx de la pared durante el período T del sistema sea pequeño,

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{V\ T}{x} = \frac{V\ 2x/v}{x} = 2\ \frac{V}{v} << 1\ ,$$

es decir, $V << v$ como podía esperarse. En esa aproximación el cambio del área sombreada, que es el valor de J, entre un ciclo y el siguiente se calcula como

$$\delta J = \text{base}\ \delta\text{altura} + \text{altura}\ \delta\text{base} + \mathcal{O}(V^2)$$

La Figura muestra que al pasar de un ciclo al siguiente es δaltura $= -4mV$ y δbase $= V\Delta t$, donde Δt es el tiempo que demora la partícula en recorrer la distancia de ida y vuelta hasta que choca nuevamente con la pared móvil. Como estamos calculando al primer orden en V, y Δt está multiplicado por V, podemos aproximar Δt al orden cero como $\Delta t \approx T = 2x/v$; por el mismo motivo aproximamos la altura por su valor de orden cero $2mv$; entonces

$$\delta J = x\ (-4mV) + 2mv\ V\ \frac{2x}{v} + \mathcal{O}(V^2) = \mathcal{O}(V^2)$$

J se comporta como un invariante adiabático porque $\delta J = \mathcal{O}(\dot{x}^2)$, siendo x el parámetro que varía lentamente en el tiempo. El cambio de J es mucho más lento que el cambio del parámetro x. Contrariamente, la energía sufre cambios de primer orden en V; el cambio de la energía en cada choque es

$$\delta H = \frac{p^2}{2m}\ - \frac{(p-2mV)^2}{2m} = 2pV + \mathcal{O}(V^2) = \mathcal{O}(V)$$

1.1 Aplicación: expansión adiabática de un gas

El ejemplo anterior puede aplicarse a la expansión adiabática de un gas de partículas libres en una caja. La invariancia adiabática de $J = 2\ m\ v\ x$ se reproduce en cada una de las tres dimensiones: $v_x x$, $v_y y$, $v_z z$, son aproximadamente constantes de movimiento. Elevando al cuadrado, y promediando sobre las partículas del gas,

$$< v_x^2 >\ x^2 \simeq cte\ , \qquad < v_y^2 >\ y^2 \simeq cte\ , \qquad < v_z^2 >\ z^2 \simeq cte\ .$$

Por isotropía, podemos afirmar que $< v_x^2 > = < v_y^2 > = < v_z^2 >$, que a su vez es proporcional a la temperatura del gas (que es una medida de la energía cinética media del gas). Entonces, multiplicando las tres relaciones anteriores,

$$\text{temperatura}^3\ x^2 y^2 z^2 \simeq cte$$

Es decir

$$\text{temperatura}^3\ \text{volumen}^2 \simeq cte$$

que es la ley de expansión adiabática de los gases ideales monoatómicos.

2 Formulación general

Las variables ángulo-acción fueron definidas mediante una transformación canónica generada por la solución S_o de la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo,

$$H\left(q, \frac{\partial S_o}{\partial q}; \lambda\right) = E(J; \lambda) \tag{1}$$

Si el Hamiltoniano adquiriera una dependencia explícita del tiempo a través de la variación lenta del parámetro λ, entonces ya no será cierto que $S = S_o - E\ t$ resuelva la ecuación de Hamilton-Jacobi dependiente del tiempo. Pero nada impide seguir usando la función $S_o(q, J; \lambda(t))$ para generar una transformación canónica. Más aún, $S_o(q, J; \lambda(t))$ seguirá siendo solución de la ecuación (1), lo que significa que podremos reemplazar el Hamiltoniano H por $E(J; \lambda(t))$. Como la generatriz ahora depende del tiempo entonces tendremos un nuevo Hamiltoniano $\overline{H}$ para hacer evolucionar las nuevas variables. La transformación canónica se verá así:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial q}\ , \qquad\qquad \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial J}\ , \\ \overline{H} &= H + \frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial t} = E(J; \lambda) + \frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial \lambda}\ \dot{\lambda} \end{aligned} \tag{2}$$

En las ecuaciones de Hamilton para las variables nuevas, $\overline{H}$ entra como $\overline{H}(\theta, J)$. Aquí debemos cuidar que la derivada $\partial S_o/\partial\lambda$ en el segundo término de $\overline{H}$ se realice antes del reemplazo de q como $q(\theta, J)$. Como la función $q(\theta, J)$ tiene, en general, una dependencia en λ, las operaciones de derivar respecto de λ y reemplazar $q(\theta, J; \lambda)$ no conmutan. En otras palabras, $\partial/\partial\lambda$ deriva la dependencia explícita de S_o en λ, sin que intervenga la dependencia implícita que se introduce a través de q. Las ecuaciones de Hamilton resultan

$$\frac{\dot{\theta}}{2\pi} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J}|_\theta = \frac{\partial E}{\partial J} + \frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial \lambda}|_{q=q(\theta, J; \lambda)}\right)\ \dot{\lambda} \tag{3}$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \frac{\theta}{2\pi}}|_J = -2\pi\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial \lambda}|_{q=q(\theta, J; \lambda)}\right)\ \dot{\lambda} \tag{4}$$

Notemos que J dejó de ser una constante de movimiento; varía lentamente si la variación de λ es lenta. Tampoco vale ya que $\partial E/\partial J$ sea constante en la ecuación para $\dot{\theta}$, ni que θ evolucione uniformemente. Queremos ver que la variación temporal de J, sin embargo, es mucho más lenta que la de λ cuando se la promedia en un ciclo de la variable ángulo. Si suponemos que λ varía muy poco en un ciclo, podemos aproximar λ y $\dot{\lambda}$ por sus valores iniciales:

$$\dot{J} \simeq -2\pi \;\; \dot{\lambda}_o \;\; \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial S_o(q,J;\lambda)}{\partial\lambda}|_{q=q(\theta,J;\lambda)}\right)\right]_{\lambda_o}$$

Para promediar $\dot{J}$ en un ciclo aproximaremos J en el integrando por una constante. Esta aproximación está justificada porque $\dot{J}$ ya es de primer orden en $\dot{\lambda}_o$, y basta con calcular a este orden de aproximación. Entonces

$$< \dot{J} > \simeq -\dot{\lambda}_o \; \int_0^{2\pi} d\theta \;\; \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial S_o(q,J;\lambda)}{\partial\lambda}|_{q=q(\theta,J;\lambda)}\right)\right]_{\lambda_o}$$

Como J y λ son constantes en el integrando, entonces la integral se reduce a evaluar la función entre paréntesis en los extremos de integración. Esa función es del tipo de las funciones de estado consideradas en sistemas conservativos. Se trata entonces de una función periódica de la variable ángulo θ, lo que implica que $< \dot{J} >$ se anula en primera aproximación.[2] Por lo tanto, $\dot{J}$ no sólo es chica sino que su promedio en un ciclo es aproximadamente cero. Los cambios de J al transcurrir el ciclo tienden a compensarse, evidenciando así el carácter de invariante adiabático de la variable acción J.

Veamos ahora los errores cometidos al aproximar λ y $\dot{\lambda}$ por sus valores iniciales. Para ello usaremos desarrollos en serie de Taylor en $t = 0$:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{\lambda}_o + \ddot{\lambda}_o \; t + ...$$

y [3]

$$\frac{\partial^2 S_o}{\partial q \; \partial\lambda} \; = \; \left[\frac{\partial^2 S_o}{\partial q \; \partial\lambda}\right]_{\lambda_o} + \left[\frac{\partial^3 S_o}{\partial q \; \partial\lambda^2}\right]_{\lambda_o} (\lambda - \lambda_o) + ... \; = \; \left[\frac{\partial^2 S_o}{\partial q \; \partial\lambda}\right]_{\lambda_o} + \left[\frac{\partial^3 S_o}{\partial q \; \partial\lambda^2}\right]_{\lambda_o} \dot{\lambda}_o \; t + ...$$

donde t corre entre 0 y el período del ciclo. Entonces resulta

$$\frac{\partial^2 S_o}{\partial q \; \partial\lambda} \; \dot{\lambda} = \left[\frac{\partial^2 S_o}{\partial q \; \partial\lambda}\right]_{\lambda_o} \dot{\lambda}_o + \mathcal{O}(\dot{\lambda}_o^2 \; , \; \ddot{\lambda}_o)$$

Por lo tanto

$$< \dot{J} > = \; \mathcal{O}(\dot{\lambda}_o^2 \; , \; \ddot{\lambda}_o) \; .$$

Comparemos con el ritmo al que cambia la energía $E(J;\lambda)$:

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial J} \; \dot{J} + \frac{\partial E}{\partial\lambda} \; \dot{\lambda}$$

Como a orden cero $\partial E/\partial\lambda$ es una constante de movimiento, entonces $< \dot{E} > = \; \mathcal{O}(\dot{\lambda}_o)$.

[2] La función $S_o(q, J)$ es multivaluada, pues está determinada a menos de términos que son múltiplos de las J_μ (ver Nota 2 en clase anterior). Pero estos términos no contribuyen a $\partial S_o/\partial\lambda$.

[3] En el integrando de $< \dot{J} >$ es $\partial^2 S_o/\partial\theta \; \partial\lambda = (\partial^2 S_o/\partial q \; \partial\lambda)(\partial q/\partial\theta)$.

Como ejemplo de invariante adiabático mencionemos que la excentricidad de la órbita Kepleriana es un invariante adiabático pues resulta una función de las variables acción, sin la participación de ningún parámetro,[4]

$$e = \sqrt{1 - \frac{J_\phi^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^2}} \;.$$

En cambio, las dimensiones de la órbita serían afectadas por una variación de los parámetros (por ejemplo la masa de la estrella o la constante de gravitación universal).

3 Oscilador armónico con frecuencia variable

Consideremos un Hamiltoniano de oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\;\omega(t)^2\; q^2$$

Sabemos que la función generatriz que lleva a las variables ángulo-acción es

$$S_o(q, J; \omega) = m\;\omega \int \sqrt{\frac{J}{\pi\; m\; \omega} - q^2}\; dq$$

donde usamos que $E = \omega\; J/(2\pi)$. La relación entre θ y q resulta de

$$\theta = 2\pi\;\frac{\partial S_o}{\partial J}|_q = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\pi\; m\; \omega}{J}}\; q\right)$$

o sea

$$q = \sqrt{\frac{J}{\pi\; m\; \omega}}\;\sin\theta \tag{5}$$

En las ecuaciones de Hamilton (3) y (4), $\overline{H}$ debe estar escrito como función de θ, J. Para ello, primero calculamos $\partial S_o(q, J; \omega)/\partial\omega$ y luego reemplazamos q usando (5) [5]

$$\overline{H} \;= E(J;\omega) + \frac{\partial S_o}{\partial \omega}|_{q(\theta,J;\omega)}\;\dot{\omega} \;=\; \frac{\omega\; J}{2\pi}\;\left(1 + \frac{\dot{\omega}}{2\omega^2}\;\sin 2\theta\right) \tag{6}$$

[4]Recordemos las expresiones $e = \sqrt{1 + \frac{2\;\ell^2 E}{\alpha^2 \mu}}$, $E = -\frac{2\pi^2 m\;\alpha^2}{(J_r+J_\theta+J_\phi)^2}$, $J_\phi = \oint p_\phi\; d\phi = 2\pi p_\phi = 2\pi\ell$. No obstante debe mencionarse que los tratamientos perturbativos, como el de esta sección, no son adecuados para problemas como el de Kepler donde las frecuencias son coincidentes.

[5]Estos dos pasos no son intercambiables porque q en (5) tiene una dependencia en ω.

Entonces las ecuaciones de Hamilton resultan

$$\frac{\dot{\theta}}{2\pi} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J}|_{\theta} = \frac{\omega}{2\pi} \left(1 + \frac{\dot{\omega}}{2\omega^2} \sin 2\theta\right) , \qquad \dot{J} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \frac{\theta}{2\pi}}|_J = -\frac{J \dot{\omega}}{\omega} \cos 2\theta \quad (7)$$

Para promediar $\dot{J}$ en un ciclo aproximaremos J por una constante, y $\omega(t)$, $\dot{\omega}(t)$ por sus valores iniciales, aceptando variaciones pequeñas de estas cantidades en un ciclo.[6] Entonces al orden más bajo es

$$< \dot{J} > \simeq -\frac{J \dot{\omega}(0)}{2\pi \omega(0)} \int_0^{2\pi} d\theta \cos 2\theta = \frac{J \dot{\omega}(0)}{4\pi \omega(0)} \sin 2\theta \,|_0^{2\pi} = 0$$

Aunque J sufre cambios mientras transcurre el ciclo, esos cambios se promedian a cero (en la aproximación más baja). Se dice que J no exhibe una perturbación *secular* (es decir, una perturbación que se acumule en el tiempo). [7]

Por otro lado, el cambio de la energía $E = \omega J/(2\pi)$ es

$$\dot{E} = \frac{1}{2\pi} (\dot{\omega} J + \omega \dot{J}) \qquad \Rightarrow \qquad < \dot{E} > \simeq \frac{\dot{\omega}(0)}{2\pi} < J > = \mathcal{O}[\dot{\omega}(0)]$$

La solución para $q(t)$ se obtiene integrando θ en la ecuación (7), y reemplazado en (5). Al orden más bajo es $\theta(t) \simeq \int \omega(t)\, dt$; entonces

$$q(t) \simeq \sqrt{\frac{J(t)}{\pi m \omega(t)}} \sin \int \omega(t)\, dt \approx \sqrt{\frac{< J >}{\pi m \omega(t)}} \sin \int \omega(t)\, dt .$$

Nota: Podemos refinar la forma del invariante adiabático partiendo de J como aproximación de orden cero. Así, a primer orden tendremos que

$$\mathcal{J} \doteq J(t) \left(1 + \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)^2}\right)$$

cumple

$$\dot{\mathcal{J}} = J \times \mathcal{O}\left[\frac{\dot{\omega}^2}{\omega^3}, \frac{\ddot{\omega}}{\omega^2}\right]$$

sin necesidad de promediar.

[6] ω varía poco en un ciclo si $\Delta\omega << \omega$, donde $\Delta\omega \simeq \dot{\omega}(0)\, T$, siendo T el período del ciclo. En este ejemplo la propia frecuencia ω es la que da el período del ciclo: $T = 2\pi/\omega$. Entonces la condición de variación lenta de ω se escribe, en este caso, $\dot{\omega} << \omega^2$. Pero aquí estamos promediando J diciendo que $\dot{\omega}$ varía poco. Entonces la condición es $\ddot{\omega} << \dot{\omega}\, \omega$.

[7] En la antigua teoría de los cuantos fundada por N. Bohr en 1913, los sistemas multiperiódicos obedecen la regla de cuantificación de Wilson-Sommerfeld (1915), que dice que los invariantes adiabáticos J_μ sólo puede tomar los valores $n_\mu h$, $n_\mu \in \mathbb{N}$. La constante de Planck $h = 6,626 \times 10^{-34}$Js representa el *cuanto* de variable acción. Así, la invariancia adiabática de J es la conservación del número de cuantos ante variación lenta de los parámetros. La idea de invariancia adiabática en la mecánica fue desarrollada por P. Ehrenfest a partir de 1912.