

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 2

25 de marzo de 2021

Trabajo-Energía
Fuerzas conservativas
Teorema del virial

1 Trabajo-energía

Derivemos la energía cinética sobre las trayectorias dinámicas de un sistema de partículas:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

Integrando en el tiempo entre dos configuraciones del sistema (inicial y final, o “A” y “B”):

$$T(B) - T(A) = \int_A^B \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \equiv W_{A \rightarrow B}$$

En el lado derecho hemos definido el **trabajo** que realizan *todas* las fuerzas sobre el sistema, a lo largo de la evolución desde A hasta B.

En general las fuerzas internas realizan trabajo. Por ejemplo, consideremos la interacción entre las partículas 1 y 2. La suma de los trabajos del par de interacción es

$$\vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{f}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \vec{f}_{12} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

El resultado es distinto de cero salvo en casos donde la variación de la posición relativa $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ sea perpendicular a la fuerza de interacción.

Cuerpo rígido Si el sistema de partículas es un cuerpo rígido entonces sabemos que las distancias entre los puntos del cuerpo no cambian. Por lo tanto los módulos de los vectores $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ son fijos. Un vector \vec{A} cuyo módulo es fijo sólo puede experimentar cambios de su dirección; en ese caso es $d\vec{A} \perp \vec{A}$ (si $d\vec{A}$ tuviese una componente a lo largo de \vec{A} significaría que el módulo de \vec{A} cambia). Entonces diremos que un cuerpo rígido se caracteriza porque las posiciones relativas entre sus partículas satisfacen

$$d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \perp (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad \forall i, j$$

Aceptando que las fuerzas internas en un rígido son paralelas a las direcciones entre las partículas ($\vec{f}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$), de la relación anterior surge que no hay trabajo de fuerzas internas en un cuerpo rígido. (Nota: las fuerzas de interacción *no* son paralelas a la dirección entre partículas en la interacción magnética, en el rozamiento entre superficies en movimiento relativo, etc.)

2 Fuerzas conservativas

En general el trabajo de una fuerza depende del camino. Dicho de otro modo, $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ no es, en general, un diferencial exacto. Si $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ fuera un diferencial exacto, digamos

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV$$

entonces el trabajo de \vec{F} sería

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B)$$

cuyo resultado sólo depende de los extremos A y B, sin que importe el camino seguido para unir esos extremos. Para toda función V definida en el espacio e independiente del tiempo, se tiene que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r}$$

Decimos que una fuerza es **conservativa** si puede expresarse como

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

para alguna **energía potencial** V . El trabajo de las fuerzas conservativas no depende del camino; equivalentemente,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0, \quad \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

(Nota: a modo de contraejemplo consideremos la fuerza de rozamiento dinámico, la cual se opone siempre al desplazamiento. Entonces siempre resulta que $\vec{F}_{roz} \cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow \oint \vec{F}_{roz} \cdot d\vec{r} < 0$).

Si en un sistema de partículas existen fuerzas conservativas (ya sean internas o externas) entonces habrá una energía potencial dependiente de las posiciones de las N partículas, de forma tal que la fuerza conservativa neta sobre la partícula i se calcula como

$$\vec{F}_i^{cons} = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

donde $\vec{\nabla}_i$ deriva respecto de las componentes x, y, z de la posición \vec{r}_i . El trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema puede descomponerse en la suma del trabajo de las fuerzas conservativas más el trabajo del resto de las fuerzas:

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B}^{cons} + W_{A \rightarrow B}^{no\ cons}$$

Como $W_{A \rightarrow B} = T(B) - T(A)$ y $W_{A \rightarrow B}^{cons} = V(A) - V(B)$, obtenemos

$$[T(B) + V(B)] - [T(A) + V(A)] = W_{A \rightarrow B}^{no\ cons}$$

donde A y B significan dos configuraciones del sistema ("inicial " y "final") dentro de una evolución dinámica del mismo. Definimos la **energía mecánica** del sistema como la suma de las energías cinética y potencial, $E \equiv T + V$. Entonces

$$E(B) - E(A) = W_{A \rightarrow B}^{no\ cons}$$

Si el trabajo de las fuerzas no conservativas es cero, entonces se conserva la energía mecánica del sistema.

2.1 Fuerzas conservativas internas

Si existen fuerzas internas conservativas habrá una energía potencial V_{ij} asociada a cada par de interacción. Así será

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}$$

Para que \vec{f}_{ij} tenga la dirección de la recta que une las partículas ($\vec{f}_{ij} \parallel \vec{r}_{ij}$), V_{ij} deberá depender sólo de la distancia entre las mismas $r_{ij} \equiv |\vec{r}_{ij}| \equiv |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$:

$$V_{ij} = V_{ij}(r_{ij})$$

En efecto

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}} \vec{\nabla}_i |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$$

Como vemos, $\vec{f}_{ij} \parallel \vec{r}_{ij}$. Para que se cumpla el principio de acción y reacción debe ser

$$V_{ij} = V_{ji} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

Trabajo de las fuerzas conservativas internas. Consideremos la interacción entre las partículas 1 y 2, y usemos que $V_{12} = V_{21}$:

$$\int_A^B \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = -\int_A^B \vec{\nabla}_1 V_{12} \cdot d\vec{r}_1 - \int_A^B \vec{\nabla}_2 V_{21} \cdot d\vec{r}_2 = -\int_A^B dV_{12} = V_{12}(A) - V_{12}(B)$$

Esto significa que el trabajo total de las fuerzas internas conservativas es

$$W_{A \rightarrow B}^{cons \text{ interno}} = \sum_{i < j} (V_{ij}(A) - V_{ij}(B))$$

($\sum_{i < j}$ es una suma doble). Es decir que la energía potencial interna es

$$V^{interna} = \sum_{i < j} V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}$$

La suma doble restringida a $i < j$ significa que por cada interacción entra un solo potencial. Por ejemplo, si dos partículas interactúan mediante un resorte, la energía potencial de la interacción es $V = 1/2 k \eta^2$ (η es el estiramiento del resorte).

Si además existen fuerzas externas conservativas, la energía potencial total será la suma de $V^{interna}$ más $V^{externa}$.

3 Teorema del virial

Los sistemas formados por muchas partículas en interacción son sumamente complicados. Ya el problema de un sistema aislado de 3 cuerpos tiene solamente algunas soluciones exactas particulares. El teorema del virial nos da algunas características de la evolución de sistemas de N partículas. Definimos la **función virial**:

$$G \equiv \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i$$

cuya derivada temporal es

$$\frac{dG}{dt} \equiv \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = 2T + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

Promediamos este resultado en un intervalo de tiempo τ :

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} = 2 \langle T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

El primer miembro se anula en dos casos:

- i) Si el sistema es periódico con período τ (entonces $G(\tau) = G(0)$),
- ii) Si las posiciones y velocidades permanecen acotadas (G permanece acotado), y $\tau \rightarrow \infty$.

En cualquiera de los dos casos resulta el **teorema del virial**:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

Cuando se cumple esta relación hablamos de un sistema "virializado".

Nota histórica: en 1870 Clausius enunció el teorema diciendo que "la *vis viva* promedio es igual a su *virial*", por lo que el segundo miembro se llama *virial de Clausius*.

Sistema aislado. Si el sistema está aislado entonces

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$$

Nótese que

$$\vec{f}_{12} \cdot \vec{r}_1 + \vec{f}_{21} \cdot \vec{r}_2 = \vec{f}_{12} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{f}_{12} \cdot \vec{r}_{12}$$

En este caso es

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i < j} \vec{f}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}$$

($\sum_{i < j}$ es una suma doble).

Sistema aislado conservativo. En este caso las fuerzas derivan de los potenciales de interacción $V_{ij}(r_{ij})$:

$$\vec{f}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$$

Si los potenciales tienen la forma $V_{ij} \propto r_{ij}^\alpha$ ($\alpha = -1$ para la interacción gravitatoria; $\alpha = 2$ para la interacción elástica), entonces

$$\vec{f}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} = -\alpha V_{ij}$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = -\alpha \sum_{i < j} V_{ij} = -\alpha V$$

En este caso el teorema del virial dice que

$$\langle T \rangle = \frac{\alpha}{2} \langle V \rangle \quad (1)$$

Además podemos valernos de la conservación de la energía mecánica, $\langle T \rangle + \langle V \rangle = E$ para obtener

$$\langle T \rangle = \frac{\alpha E}{\alpha + 2}, \quad \langle V \rangle = \frac{2 E}{\alpha + 2}$$

En el caso gravitatorio ($\alpha = -1$) el sistema virializado tiene necesariamente $E < 0$. En los sistemas auto-gravitantes con $E > 0$ al menos una partícula del sistema se alejará indefinidamente a medida que el sistema evoluciona (como situación particular, también podría suceder que el sistema colapse en un tiempo finito).¹

¹Esta conclusión puede obtenerse notando que G es la derivada del **momento de inercia escalar** I :

$$G \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \equiv \frac{1}{2} \frac{dI}{dt}$$

3.1 Aplicaciones

1) En un sistema auto-gravitante (por ejemplo, una galaxia) hagamos una estimación de $\langle T \rangle$ y $\langle V \rangle$ suponiendo que las partículas son de la misma masa m :

$$\langle T \rangle \approx \frac{N m}{2} \langle v^2 \rangle, \quad \langle V \rangle \approx - \frac{N(N-1)}{2} \frac{G m^2}{\langle r \rangle}$$

donde la energía potencial tiene en cuenta el número de interacciones (el número de pares de partículas entre N), y el promedio de V se toma como el promedio de distancias entre pares de partículas. Reemplazamos en la ecuación (1); si $N \gg 1$ resulta

$$2 \langle v^2 \rangle \langle r \rangle \approx G N m = G M$$

lo cual da una forma de estimar la masa M de una galaxia. De esta manera Zwicky (1933, 1937) estimó masas de cúmulos de galaxias que resultaron unas 800 veces más grandes que las estimaciones que se obtenían de la luminosidad de los mismos. Esta fue la primera evidencia de la existencia de grandes cantidades de materia oscura (no luminosa) en galaxias y cúmulos de galaxias.

2) Veamos un *gas ideal* confinado en un recipiente. En un gas ideal despreciamos las interacciones a distancia entre las moléculas; suponemos que las moléculas (vistas como partículas) sólo interactúan cuando chocan entre sí. En ese caso la interacción no contribuye al virial de Clausius:

$$\vec{f}_{12} \cdot \vec{r}_1 + \vec{f}_{21} \cdot \vec{r}_2 = \vec{f}_{12} \cdot \vec{r}_{12} = 0, \quad \text{porque } \vec{r}_{12} = 0$$

Además debemos considerar las fuerzas externas, que se producen cuando las moléculas chocan con la pared del recipiente. Si pensamos el gas como un fluido, entonces la fuerza externa es $-p d\vec{S}$, donde p es la presión y $d\vec{S}$ es la superficie de la pared (con orientación exterior). Entonces calcularemos el virial de Clausius como

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \longrightarrow - \oint p d\vec{S} \cdot \vec{r} = -p \int \vec{\nabla} \cdot \vec{r} dv = -3 p \times \text{volumen}$$

y reemplazando en el teorema del virial,

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} p \times \text{volumen}$$

Pero la ley de los gases ideales dice que $p \times \text{volumen} = N k_B \times \text{temperatura}$ (k_B es la constante de Boltzmann). Por lo tanto concluimos que la temperatura de un gas es una medida de la energía cinética media de las partículas que lo componen.

Entonces nuestra primera ecuación dice que

$$\frac{dG}{dt} \equiv \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = 2T - \alpha V = (2 + \alpha)T - \alpha E$$

En el caso gravitatorio queda

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = T + E$$

Por lo tanto, $E > 0 \Rightarrow d^2 I / dt^2 > 0$. $I(t)$ es una función positiva cóncava hacia arriba. Viene entonces de infinito y va a infinito, lo que significa que al menos una partícula alcanza posiciones infinitamente alejadas. Como caso particular, también podría suceder que todas las partículas lleguen a una misma posición en un tiempo finito y el sistema auto-gravitante colapsara.