

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 26

1 de julio de 2021

**Acción de Jacobi
Analogía con la óptica geométrica**

1 Acción de Jacobi

Consideremos un sistema conservativo holónomo y esclerónomo,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \rho} m_{\lambda\rho}(q) \dot{q}_\lambda \dot{q}_\rho, \quad V = V(q)$$

Notemos que

$$\sqrt{2T} dt = \sqrt{\sum_{\lambda, \rho} m_{\lambda\rho}(q) dq_\lambda dq_\rho} \quad (1)$$

entonces, como $T = E - V$,

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{\lambda, \rho} m_{\lambda\rho}(q) dq_\lambda dq_\rho}{2(E - V)}} \quad (2)$$

Esto significa que el tiempo infinitesimal que el sistema demora en evolucionar entre dos configuraciones vecinas $-q_\mu$ y $q_\mu + dq_\mu$ puede calcularse si se conoce con qué energía el sistema pasa de una configuración a la otra. Este es un nuevo ejemplo de que tiempo y energía son magnitudes que juegan juntas.

La curva que la evolución del sistema describe en el espacio de configuración puede ser obtenida de un principio variacional debido a Jacobi. La acción de Jacobi,

$$A[q] = \int_{q_{\mu i}}^{q_{\mu f}} \sqrt{2(E - V) \sum_{\lambda, \rho} m_{\lambda\rho}(q) dq_{\lambda} dq_{\rho}}, \quad (3)$$

no contiene el tiempo que demora el sistema en evolucionar desde la configuración inicial $q_{\mu i}$ hasta la configuración final $q_{\mu f}$. En su lugar, A contiene el valor de la energía E con la que esa evolución se realiza. El principio variacional busca en este caso la curva entre dos configuraciones fijas que hace estacionaria la funcional A para un valor determinado de E . La acción de Jacobi no sólo no depende del tiempo sino que es independiente de cualquier parametrización que se elija para la evolución en el espacio de configuración (invariancia ante reparametrizaciones). Podemos elegir un parámetro cualquiera σ ; si multiplicamos y dividimos el integrando por $d\sigma$ tendremos

$$A = \int_{q_{\mu i}}^{q_{\mu f}} \sqrt{2[E - V(q)] \sum_{\lambda, \rho} m_{\lambda\rho}(q) \frac{dq_{\lambda}}{d\sigma} \frac{dq_{\rho}}{d\sigma}} d\sigma$$

Así podemos ver el integrando como una suerte de Lagrangiano y escribir las ecuaciones de Lagrange que hacen estacionaria la acción A :

$$0 = \frac{d}{d\sigma} \left[\sqrt{\frac{2[E - V(q)]}{\sum_{\lambda, \rho} m_{\lambda\rho}(q) \frac{dq_{\lambda}}{d\sigma} \frac{dq_{\rho}}{d\sigma}}} \sum_{\rho} m_{\mu\rho}(q) \frac{dq_{\rho}}{d\sigma} \right] - \frac{\partial}{\partial q_{\mu}} \left[\sqrt{2[E - V(q)] \sum_{\lambda, \rho} m_{\lambda\rho}(q) \frac{dq_{\lambda}}{d\sigma} \frac{dq_{\rho}}{d\sigma}} \right] \quad (4)$$

Para mostrar que estas ecuaciones efectivamente conducen a la evolución real del sistema en el espacio de configuración tendremos que reintroducir el parámetro tiempo, y comparar con las ecuaciones de Lagrange conocidas. La ecuación (2) dice que la reparametrización $t(\sigma)$ es tal que

$$\frac{dt}{d\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{\lambda, \rho} m_{\lambda\rho} \frac{dq_{\lambda}}{d\sigma} \frac{dq_{\rho}}{d\sigma}}{2(E - V)}}$$

De esa forma, en la ecuación (4) escribiremos el primer término como

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\frac{d\sigma}{dt} \sum_{\rho} m_{\mu\rho} \frac{dq_{\rho}}{d\sigma} \right] = \frac{dt}{d\sigma} \frac{d}{dt} \left[\sum_{\rho} m_{\mu\rho} \dot{q}_{\rho} \right] = \frac{dt}{d\sigma} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\mu}} \right] \quad (5)$$

Por otro lado, el segundo término de la ecuación (4) es

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left[\sqrt{2(E-V)} \sum_{\lambda,\rho} m_{\lambda\rho} \frac{dq_\lambda}{d\sigma} \frac{dq_\rho}{d\sigma} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left[2 \sqrt{(E-V)T} \right] \frac{dt}{d\sigma} = \left[\sqrt{\frac{E-V}{T}} \frac{\partial T}{\partial q_\mu} - \sqrt{\frac{T}{E-V}} \frac{\partial V}{\partial q_\mu} \right] \frac{dt}{d\sigma} \quad (6)
\end{aligned}$$

Pero la propia definición (2) del parámetro t implica que $E - V = T$. De modo que reemplazando los resultados (5) y (6) en la ecuación (4) llegamos a

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} \right] - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_\mu} = 0$$

que es la forma habitual de las ecuaciones para la evolución temporal del sistema.

2 Analogía con la óptica geométrica

La óptica geométrica describe la propagación de la luz mediante trayectorias que llamamos **rayos**. Esas trayectorias pueden obtenerse del principio de Fermat (1658), que es el primer principio variacional de la Historia.¹

2.1 Principio de Fermat

Los rayos de luz se propagan sobre trayectorias que hacen estacionario el camino óptico $\int n \, dl$, donde n es el índice de refracción y dl es la longitud de arco sobre la trayectoria.

Es notable la analogía entre el principio de Fermat y el principio variacional de Jacobi. La acción de Jacobi podría escribirse como

$$A = \int_{q_{\mu i}}^{q_{\mu f}} \sqrt{2(E-V)} \, dl, \quad (7)$$

donde dl es una “longitud” definida en el espacio de configuración como

$$dl \equiv \sqrt{\sum_{\lambda,\rho} m_{\lambda\rho}(q) \, dq_\lambda \, dq_\rho} \quad (8)$$

donde $m_{\lambda\rho}(q)$ juega el papel de un tensor métrico en ese espacio. En el caso de una sola partícula de masa m es mejor usar dl , la longitud de arco sobre la trayectoria de la partícula

¹ En la Antigüedad, Herón de Alejandría ya había notado que, al reflejarse en un espejo, el rayo toma el camino más corto entre el objeto y el observador.

en el espacio físico, y escribir la masa dentro de la raíz. Además, como la acción de Jacobi se varía con E constante, entonces podemos escribir el principio variacional de Jacobi como

$$\delta \int_{q_i}^{q_f} \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{E} d\ell = 0 .$$

A su vez el principio de Fermat dice que

$$\delta \int_{q_i}^{q_f} \frac{n}{c} d\ell = 0 ,$$

donde incluimos c para ver el integrando como la inversa de la velocidad de fase $w_f = c/n$ de la onda en un medio con índice de refracción n . La velocidad de fase se relaciona con la longitud de onda λ y la frecuencia ν : $w_f = \lambda\nu$. Entonces, comparando ambos principios variacionales vemos que

$$\frac{n}{c} = \frac{\lambda^{-1}}{\nu} \quad \text{juega el papel de} \quad \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{E} = \frac{p}{E}$$

Esta identificación muestra el sentido de las ideas de L. de Broglie, quien en 1924 postuló que las partículas poseen propiedades de onda cuya relación con sus propiedades de partícula son similares a las de los fotones: $E = h\nu$, $p = h\lambda^{-1}$ (h es la constante de Planck).² Así la regla de cuantificación de Wilson-Sommerfeld, $\oint p dq = Nh$, aplicada a la órbita del electrón en el átomo implica que el perímetro de la órbita $\oint dq$ es igual a $N\lambda$; o sea que la longitud de onda λ de la *onda piloto* de de Broglie cabe un número entero de veces en la órbita.

2.2 Ecuación de la eikonal

La óptica geométrica del principio de Fermat no es más que una aproximación de la óptica física, que es válida esencialmente en aquellas regiones del espacio donde la onda luminosa pueda ser aproximada por una onda plana.

En la ecuación de onda

$$\nabla^2 \varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0 ,$$

donde n es el índice de refracción, consideremos una onda monocromática

$$\varphi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) e^{i [2\pi\nu t - \phi(\vec{r})]}$$

donde $A(\vec{r})$ es una amplitud que puede depender de la posición. Entonces la ecuación de onda queda

$$\nabla^2 \varphi = - \left(\frac{2\pi\nu n}{c} \right)^2 \varphi \quad (9)$$

²La velocidad de grupo $w_g = \partial\nu/\partial(\lambda^{-1})|_{\lambda_0}$ de un paquete de ondas formado por ondas monocromáticas de longitudes de onda similares, que varían poco alrededor de un valor λ_0 , se identifica entonces con $\partial E/\partial p = \dot{q}$. En un medio no dispersivo, donde el índice de refracción no depende de λ , es $w_g = \partial(c\lambda^{-1}/n)/\partial(\lambda^{-1}) = c/n = w_f$. Para relaciones de dispersión no triviales w_g (la velocidad del rayo o de la energía) no coincide con w_f (la velocidad de los frentes de onda, medida sobre la perpendicular a los mismos). Para la relación de dispersión relativista $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ se obtiene que $w_g = c^2/w_f$.

Por otro lado es

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= \nabla \cdot \vec{\nabla}\varphi = \nabla \cdot \left[\left(\vec{\nabla}A - iA \vec{\nabla}\phi \right) e^{i[2\pi\nu t - \phi(\vec{r})]} \right] \\ &= \left(\nabla^2A - i2\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}\phi - iA \nabla^2\phi - A |\vec{\nabla}\phi|^2 \right) e^{i[2\pi\nu t - \phi(\vec{r})]}\end{aligned}$$

que sustituiremos en (9) descomponiendo en partes real e imaginaria:

$$\nabla^2A - A |\vec{\nabla}\phi|^2 = - \left(\frac{2\pi\nu n}{c} \right)^2 A \quad (10)$$

$$2\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}\phi + A \nabla^2\phi = 0 \quad (11)$$

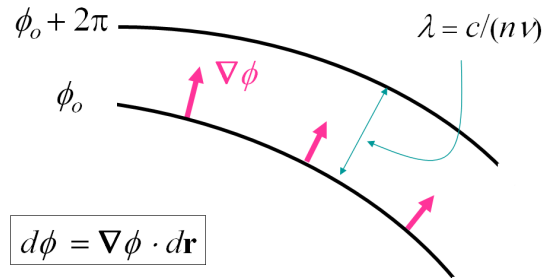
En general, para una magnitud A cualquiera, es $|\nabla^2A/A| \sim d^{-2}$ donde d es una distancia característica del cambio de A . En la óptica geométrica están excluidos los fenómenos de interferencia, donde la amplitud A varía sensiblemente en dimensiones del orden de la longitud de onda $\lambda = c/(n\nu)$; por lo tanto se requiere que $d \gg \lambda$, es decir $|\nabla^2A/A| \ll \lambda^{-2}$. Haciendo esta aproximación en la ecuación (10) queda la **ecuación de la eikonal**,

$$|\vec{\nabla}\phi|^2 \simeq \left(\frac{2\pi\nu n}{c} \right)^2 \quad (12)$$

A su vez, la ecuación (11) dice que

$$\frac{\nabla^2\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} = -2 \left| \frac{\vec{\nabla}A}{A} \right| \cos \alpha ,$$

donde α es el ángulo entre $\vec{\nabla}\phi$ y $\vec{\nabla}A$. El miembro derecho tiene valor absoluto mucho menor que λ^{-1} , lo que significa que los cambios de $\vec{\nabla}\phi$ ocurren en dimensiones mucho mayores que la longitud de onda. Si en una región la dirección de $\vec{\nabla}\phi$ es aproximadamente constante entonces los frentes de onda (las superficies de igual fase ϕ a cada t) se parecerán a planos.³ Para que $|\vec{\nabla}\phi|$ sea aproximadamente constante deberá también serlo el índice de refracción n ; entonces la longitud de onda $\lambda = c/(n\nu)$ –la distancia entre las crestas de la onda– será aproximadamente constante y los frentes de onda serán aproximadamente paralelos:



³ En un medio isótropo los rayos tienen dirección perpendicular a los frentes de onda, que es la dirección de $\vec{\nabla}\phi$.

La analogía entre la óptica geométrica y la mecánica puede verse ahora como la analogía entre la ecuación de la eikonal y la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$H\left(q, \frac{\partial S_o}{\partial q}\right) = E ,$$

que para una partícula es

$$\left|\vec{\nabla} S_o\right|^2 = 2m(E - V) .$$

Para que tenga sentido asociar $\vec{p} = \vec{\nabla} S_o$ con rayos, y S_o con la fase de los frentes de onda, deberíamos imaginar en el espacio una superficie inicial donde un conjunto de partículas de igual energía E comienza su movimiento en dirección perpendicular a la misma. Naturalmente este cuidado no es necesario con la luz porque los rayos de luz no son entes individuales sino manifestaciones de un mismo campo.

Como la eikonal ϕ es adimensional, dividiremos S_o por la constante de Planck $\hbar \equiv h/(2\pi)$ para escribir la ecuación de Hamilton-Jacobi como

$$\left|\vec{\nabla} \frac{S_o}{\hbar}\right|^2 = \frac{2m(E - V)}{\hbar^2}$$

La analogía entonces es

$$\frac{S_o}{\hbar} \longleftrightarrow \phi$$

$$\frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar} \longleftrightarrow \frac{2\pi\nu n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La última ecuación también dice que

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

que es la longitud de onda de la onda piloto de de Broglie.

3 Ecuación de Schrödinger

En 1926 Schrödinger propuso darle un tratamiento ondulatorio a la Mecánica, reemplazando la ecuación de Hamilton-Jacobi (el análogo de la ecuación de la eikonal) por una ecuación de ondas como la (9):

$$\nabla^2 \psi = -\frac{2m(E - V)}{\hbar^2} \psi$$

es decir

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi$$

que es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. En lugar de las reglas de cuantificación primitivas, los valores permitidos de la energía E , y otras magnitudes compatibles, son determinados por las soluciones de esta ecuación. Inmediatamente Schrödinger propuso una ecuación más general,

$$\hat{H} \left(q_\nu, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_\nu} \right) \Psi(q_\mu, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q_\mu, t)$$

donde el operador \hat{H} es el Hamiltoniano con los momentos p_ν reemplazados por $(\hbar/i)(\partial/\partial q_\nu)$.⁴ El valor de $|\Psi(q_\mu, t)|^2$, convenientemente normalizado, describe la probabilidad de encontrar el sistema en una determinada configuración $\{q_\mu\}$ a tiempo t . En el caso de una partícula, la última ecuación se reduce a la anterior si la función de onda es *estacionaria* $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, donde vemos la asociación entre energía y frecuencia propuesta por de Broglie. Esta descripción *ondulatoria* de la mecánica, mediante una densidad de probabilidades, implica que las partículas manifiestan fenómenos de interferencia del tipo de los de la óptica física.

⁴La construcción de \hat{H} , sin embargo, puede estar sujeta a ambigüedades debidas a la no conmutatividad entre q_ν y $\partial/\partial q_\nu$.