Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 4
5 de abril de 2021

Ecuaciones de Lagrange

1 Ecuaciones de Lagrange

La clase pasada finalizamos con el **Principio de d'Alembert**

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i^{\,V} = \sum_{i=1}^{N} m_i \; \vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i^{\,V}$$

donde las fuerzas de vínculo $\vec{R}_i$ han sido excluidas por aplicación del Principio de los trabajos virtuales. Las fuerzas que permanecen en la expresión son las fuerzas *aplicadas* (aquellas que se expresan en función de las posiciones y velocidades de las partículas). Por otro lado, los desplazamientos $\delta\vec{r}_i^{\,V}$ son desplazamientos *virtuales* (a $\delta t = 0$) compatibles con los vínculos.

Para entender el significado de esta expresión es esencial comprender que los desplazamientos virtuales no son independientes, sino que están sujetos a cumplir las ecuaciones de vínculo a tiempo fijo. Porque si la igualdad fuera válida para desplazamientos arbitrarios entonces se concluiría que los coeficientes de cada desplazamiento de un lado y otro de la igualdad deben ser iguales. Es decir, se concluiría que $\vec{F}_i = m_i \; \vec{a}_i$, lo cual es falso porque lo verdadero es que $\vec{F}_i + \vec{R}_i = m_i \; \vec{a}_i$.

Para dar el siguiente paso, debemos darle forma a los desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos. Si los vínculos son holónomos, entonces tendremos m relaciones entre las coordenadas (y el tiempo) que permitirán pasar de las $3N$ coordenadas originales a $n = 3N - m$ coordenadas que podremos variar independientemente sin afectar los vínculos. Equivalentemente, podemos introducir n coordenadas generalizadas q_μ ($\mu = 1, ..., n$) que describan los grados de libertad a los que queda reducido el sistema una vez que los vínculos son tenidos en cuenta. Es decir que las coordenadas q_μ pueden ser variadas libre e independientemente sin afectar los vínculos.

Una vez elegido un conjunto de n coordenadas generalizadas q_μ para describir los grados de libertad del sistema, escribiremos los N vectores posición en función de las q_μ's (y de t, en caso que haya vínculos reónomos),

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, ..., q_n, t)$$

Los desplazamientos

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\ \delta q_\mu + \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial t}\ \delta t$$

son automáticamente compatibles con los vínculos, pues sólo entran en juego las variaciones de las coordenadas asociadas a los grados de libertad. Para que sean virtuales eliminamos el último término:

$$\delta\vec{r}_i^{\ V} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\ \delta q_\mu$$

Reemplazando en el Principio de d 'Alembert,

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right)\ \delta q_\mu = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ \vec{a}_i \cdot \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right)\ \delta q_\mu \tag{1}$$

Vamos a trabajar con el miembro de la derecha para darle una forma más interesante. Comencemos escribiendo

$$\vec{a}_i \cdot \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right) - \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right) \tag{2}$$

Veamos que

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\ \vec{r}_i(q_\mu(t),\ t) = \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\ \dot{q}_\nu$$

Entonces $\vec{v}_i = \vec{v}_i(q_\mu, \dot{q}_\mu, t)$, donde la única dependencia en las **velocidades generalizadas** $\dot{q}_\mu$ es la que se observa en el último término. Entonces obtenemos que

$$\frac{\partial\ \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu}$$

Por otro lado, también podemos ver que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right) = \frac{\partial^2\ \vec{r}_i}{\partial t\ \partial q_\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\ \vec{r}_i}{\partial q_\nu\ \partial q_\mu}\ \dot{q}_\nu$$

Viendo a las coordenadas y velocidades generalizadas como variables independientes, entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial q_\mu}\left(\frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\ \dot{q}_\nu\right) = \frac{\partial\ \vec{v}_i}{\partial q_\mu}$$

reemplazando estos resultados en la ecuación (2) llegamos a

$$\vec{a}_i \cdot \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial\ \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\ \vec{v}_i}{\partial q_\mu} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ v_i^2}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \frac{1}{2}\ \frac{\partial\ v_i^2}{\partial q_\mu}$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ \vec{a}_i \cdot \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ T}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \frac{\partial\ T}{\partial q_\mu}$$

Por otro lado, llamaremos **fuerza generalizada** Q_μ a

$$Q_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N}\ \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu}$$

(nótese que el índice no alude a partículas sino a grados de libertad). Reemplazando en la ecuación (1) llegamos a

$$\sum_{\mu=1}^{n}\ \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ T}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \frac{\partial\ T}{\partial q_\mu} - Q_\mu\right)\ \delta q_\mu = 0 \tag{3}$$

Pero como los δq_μ son arbitrarios e independientes, entonces concluimos que la igualdad vale porque se anulan cada uno de los coeficientes de los δq_μ. Entonces obtenemos n ecuaciones dinámicas que se escriben

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ T}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \frac{\partial\ T}{\partial q_\mu} = Q_\mu \qquad\qquad \mu = 1, ..., n}$$

Son tantas ecuaciones como grados de libertad, y no aparecen las fuerzas de vínculo. Para usar estas ecuaciones es suficiente conocer la energía cinética del sistema como una función de las coordenadas y velocidades generalizadas, $T = T(q_\mu, \dot{q}_\mu, t)$, calculada en un sistema de referencia inercial. Estas son las **ecuaciones de Lagrange** (o de Euler-Lagrange), aunque ese nombre suele reservarse al caso conservativo que veremos enseguida. Nótese que la *forma* de las ecuaciones es independiente del carácter de las coordenadas generalizadas utilizadas (*covariancia*). Claro que para cada problema habrá coordenadas más aptas, que otorguen una forma más sencilla a la función T, y de ese modo faciliten la resolución de las ecuaciones.

Las ecuaciones de Lagrange son ecuaciones diferenciales de segundo orden para las funciones $q_\mu(t)$. Su resolución permite obtener la evolución del sistema físico en el espacio de configuración. Cada solución particular corresponde a un determinado conjunto de valores iniciales para q_μ y $\dot{q}_\mu$.

Si las fuerzas aplicadas son conservativas, $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$, las fuerzas generalizadas resultan

$$Q_\mu = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial\ \vec{r}_i}{\partial q_\mu} = -\frac{\partial\ V}{\partial q_\mu}$$

Entonces las fuerzas generalizadas pueden pasarse al primer miembro de las ecuaciones de Lagrange y combinarse con el segundo término de las mismas para dar $\partial(T - V)/\partial q_\mu$. Pero como $\partial V/\partial \dot{q}_\mu\ = 0$, no cometemos error si V es incluido también en el primer término; así obtendremos las ecuaciones que más usualmente se denominan **ecuaciones de Lagrange** (o de Euler-Lagrange):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ L}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \frac{\partial\ L}{\partial q_\mu} = 0 \qquad\qquad \mu = 1, ..., n}$$

donde

$$\boxed{L(q_\mu, \dot{q}_\mu, t) \;\equiv\; T - V}$$

es la función Lagrangiana del sistema físico.

1.1 Ejemplos

1) La oscilación de un **péndulo simple** en un plano implica un único grado de libertad. La coordenada más apta para describir ese grado de libertad es el ángulo θ que va desde la vertical hasta el hilo que sujeta la partícula de masa m (pero también podríamos usar la altura de la partícula u otra coordenada equivalente).

El vínculo es holónomo y escleróomo: la distancia de la partícula al punto de suspensión es igual a la longitud del hilo ℓ (involucra coordenadas en forma independiente del tiempo), y, además, el movimiento está restringido a ocurrir en un plano.

El vector velocidad es $\vec{v} = \ell\ \dot{\theta}\ \hat{\theta}$, entonces la energía cinética es $T = (1/2)\ m\ \ell^2\ \dot{\theta}^2$.

La energía potencial gravitatoria es $V = -mg\ell\ \cos\theta$. Entonces el Lagrangiano es

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\ m\ \ell^2\ \dot{\theta}^2 + mg\ell\ \cos\theta$$

La (única) ecuación de Lagrange queda así:

$$\frac{d}{dt}\left(m\ \ell^2\ \dot{\theta}\right) + mg\ell\ \sin\theta = 0$$

es decir

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\ \sin\theta = 0$$

que es la ecuación de movimiento del péndulo.

Para finalizar, utilicemos este mismo ejemplo para mencionar un aspecto de la fuerza generalizada. Si bien en este ejemplo no fue necesario calcularla porque la sustituimos por el conocimiento del potencial, veamos cuánto vale. La única fuerza *aplicada* es el peso (además hay una fuerza de vínculo: la tensión del hilo). Entonces la fuerza generalizada es

$$Q = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = m\vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -mg\ \hat{\jmath} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$$

donde

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\ (\ell\ \sin\theta\ \hat{\imath} - \ell\ \cos\theta\ \hat{\jmath}) = -\ell\ \cos\theta\ \hat{\imath} + \ell\ \sin\theta\ \hat{\jmath}$$

Entonces

$$Q = -mg\ell\ \sin\theta$$

Podemos verificar que $Q = -\partial V / \partial \theta$.

En este ejemplo la fuerza generalizada no es una fuerza sino un torque; es el torque del peso respecto del punto de suspensión del péndulo. Como vemos, el carácter de la fuerza generalizada depende del carácter de la coordenada generalizada q que utilicemos.

2) En el ejemplo de la partícula enhebrada en el aro rotante (ver Clase 3), los vínculos son

$$x = \sqrt{R^2 - z^2}\ \cos\omega t\ , \qquad y = \sqrt{R^2 - z^2}\ \sin\omega t$$

La partícula tiene entonces un grado de libertad. Una coordenada generalizada adecuada para describir ese grado de libertad es el ángulo θ entre el eje de rotación del aro y el radio que une el centro del aro con la partícula. Como $z = R\cos\theta$, la posición de la partícula es

$$\vec{r} = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{k} = R\ \sin\theta\ \cos\omega t\ \hat{\imath} + R\ \sin\theta\ \sin\omega t\ \hat{\jmath} + R\ \cos\theta\ \hat{k}$$

Así calculamos la velocidad

$$\vec{v}\ =\ \frac{d\vec{r}}{dt}\ =\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\ \dot{\theta}\ =\ ...$$

cuyo módulo al cuadrado resulta

$$v^2 = R^2\omega^2\sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2$$

La energía potencial es

$$V = mgz = mg\ R\ \cos\theta$$

y el Lagrangiano resulta

$$L = \frac{1}{2}\ m\ (R^2\omega^2\sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2) - mg\ R\ \cos\theta$$

Reemplazando en la ecuación de Lagrange se obtiene la ecuación dinámica para $\theta(t)$:

$$R\,\ddot{\theta} = \omega^2 R\ \sin\theta\ \cos\theta + g\ \sin\theta$$

Debe notarse que hemos trabajado desde un sistema inercial. En tal sistema se ve rotar el aro, y los vínculos quedan como los hemos escrito. Así se llegó a la forma de la energía cinética, donde vemos un término debido a la contribución de la rotación ω del aro. Es igualmente posible trabajar en el sistema no inercial fijo al aro. En ese caso los vínculos son distintos (corresponden a la situación donde $\omega = 0$). La energía cinética carecerá del término asociado a ω; pero en su lugar habrá que agregar las fuerzas de inercia, que entrarán en la fuerza generalizada. De una forma o de la otra se obtendrá la misma ecuación dinámica (la evolución de θ es independiente del carácter del sistema de referencia). Notoriamente, la ecuación dinámica iguala la aceleración tangencial $R\,\ddot{\theta}$ a la suma de las componentes tangenciales del peso y la fuerza centrífuga $-m\ \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,')$. La fuerza de vínculo es perpendicular al aro (la aceleración tangencial no depende de ella). Como en el sistema no inercial aparece también la fuerza de Coriolis $-2m\ \vec{\Omega}\times\vec{v}\,'$, que es perpendicular al plano del aro, concluimos que la fuerza de vínculo tiene una componente perpendicular al plano del aro para cancelar la fuerza de Coriolis (no hay aceleración perpendicular al plano del aro en el sistema no inercial). Esa componente de la fuerza de vínculo realiza trabajo; pero el trabajo *virtual* es nulo porque corresponde a desplazamientos compatibles con los vínculos *a tiempo fijo*. Por otro lado, es fácil verificar que la fuerza de Coriolis no contribuye a la fuerza generalizada en el sistema no inercial.