

## MECÁNICA CLÁSICA

**Profesor: Rafael Ferraro**

### Clase 6

12 de abril de 2021

### Principios variacionales

## 1 Cálculo variacional

El cálculo diferencial es la herramienta para encontrar máximos y mínimos de funciones. Pero hay otro tipo de problemas donde se buscan extremos o puntos estacionarios no de funciones sino de integrales de funciones. Por ejemplo:

1) El problema de encontrar el camino de menor longitud sobre un plano para unir dos puntos dados. En este caso habrá que minimizar la integral

$$\ell[y(x)] = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

En este caso  $\ell[y(x)]$  depende de la función  $y(x)$  a través de una integral que involucra la derivada de  $y(x)$ . Debe tenerse en cuenta que la expresión para la longitud de una curva depende de la geometría del espacio donde se traza la curva. Por ejemplo, la longitud sobre una superficie esférica, escrita en términos de las coordenadas angulares usuales en la esfera, tendría otra forma; la **funcional**  $\ell$  (función de función) sería diferente.

2) El problema de encontrar el camino del descenso más rápido entre dos puntos A y B a distintas alturas  $y$ , que no estén sobre la misma vertical ( $x_A \neq x_B$ ). Este es el problema de la *braquistócrona*, y fue estudiado por los hermanos Bernoulli en 1696. En este caso queremos minimizar

$$\Delta t = \int_A^B \frac{d\ell}{v} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g y(x)}} dx$$

donde el denominador es  $v(y)$ , tal como resulta de la conservación de la energía mecánica. El tiempo que demanda recorrer un camino  $y(x)$  es una funcional de  $y(x)$ :  $\Delta t = \Delta t[y(x)]$ . Como vemos, una funcional se construye con una función y sus derivadas.

3) El Principio de Fermat de la óptica geométrica (1679), que dice que el recorrido del rayo extremiza el camino óptico definido como  $\int_A^B n \, dl$ . El índice de refracción, que se relaciona con la velocidad de fase ( $n = c/v_f$ ), depende del camino del rayo a través de las propiedades del medio donde la luz se propaga.

La rama de las matemáticas que se ocupa del problema de extremar **funcionales** es el **cálculo variacional**, y fue fundada por Euler en 1733.

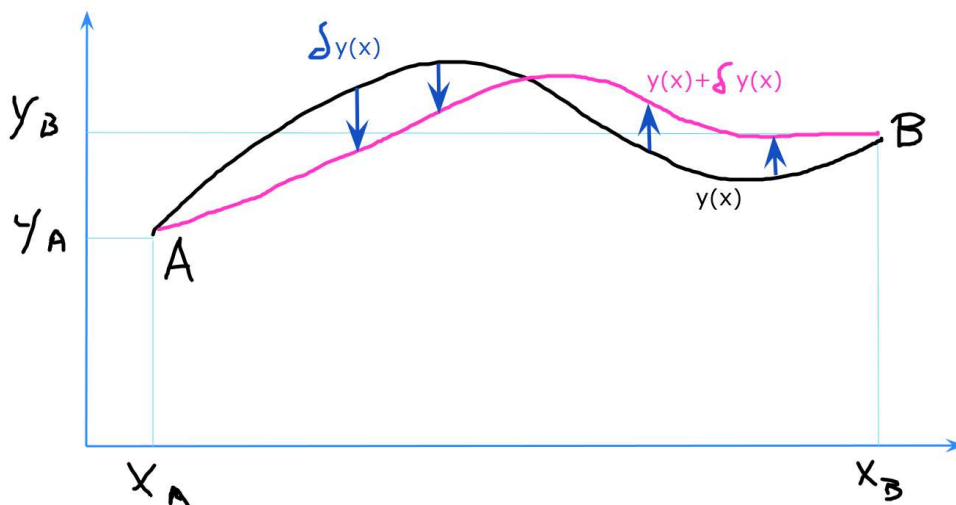
Vamos a ver el método general para extremar (o hacer estacionaria) una funcional de la forma

$$I[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} F(y(x), y'(x), x) \, dx$$

Mientras que en el cálculo diferencial extremamos una función  $f(x)$  buscando el punto  $x$  donde una variación  $x \rightarrow x + \delta x$  no afecte la función a primer orden ( $\delta f = 0$ ), en el cálculo variacional debemos variar la función  $y$ ,  $y(x) \rightarrow y(x) + \delta y(x)$ , en busca de la función  $y(x)$  cuya variación no afecte la integral  $I[y(x)]$  al primer orden en  $\delta y$ . Normalmente la variación  $\delta y(x)$  está sujeta a condiciones de contorno; en nuestro caso, trabajaremos con variaciones que se anulan en los extremos de integración:

$$\delta y(x_A) = 0 = \delta y(x_B)$$

Entonces, las variaciones serán del tipo que se muestra en la Figura:<sup>1</sup>



Nótese en la Figura que la variación de  $y$  también produce una variación de su derivada en cada valor de  $x$ :

$$\delta y' = \frac{d}{dx}(y(x) + \delta y(x)) - \frac{dy(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \delta y(x)$$

<sup>1</sup>La variación  $\delta y(x)$  de una función  $y(x)$  no debe confundirse con su diferencial:  $dy = y'(x) \, dx$ . La variación  $\delta y$  toma valores infinitesimales arbitrarios en cada  $x$  (salvo en los extremos, en nuestro caso). En cambio el diferencial  $dy$  está determinado por la derivada de la propia función  $y$ .

Entonces, la variación de la función  $y(x)$  produce un cambio en el valor de la integral

$$\begin{aligned}\delta I &= I[y + \delta y] - I[y] = \int_{x_A}^{x_B} [F(y + \delta y, y' + \delta y', x) - F(y, y', x)] dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right] dx ,\end{aligned}$$

donde reemplazamos el valor de  $\delta y'$  en la última integral. Precisamente en ese término podemos hacer una integración por partes,

$$\delta I = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y(x) dx + \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_A}^{x_B}$$

Pero el término de borde se anula por la condición de contorno  $\delta y(x_A) = 0 = \delta y(x_B)$ . Entonces queda

$$\delta I = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y(x) dx$$

Para que la integral  $I$  sea estacionaria ( $\delta I = 0$ ) ante variaciones infinitesimales arbitrarias  $\delta y(x)$  entonces la función  $y(x)$  debe ser aquella que anula el integrando:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden que implica dos condiciones de contorno a ser fijadas para obtener una solución particular. En nuestro caso las condiciones de contorno fueron fijadas al momento de hacer la variación como  $y(x_A) = y_A$ ,  $y(x_B) = y_B$ .

Este método del cálculo variacional se replica para funcionales que dependen de  $n$  funciones y sus primeras derivadas.<sup>2</sup> Como vemos, la ecuación obtenida es una ecuación de Euler-Lagrange. Esto significa que las leyes de la Mecánica Analítica de Lagrange pueden verse como el resultado de un cálculo de variaciones. Entonces podríamos decir que las leyes de la Dinámica provienen de un **principio variacional**.

---

<sup>2</sup>El método se extiende fácilmente para funcionales que dependan de derivadas de orden superior, con el agregado de las condiciones de contorno necesarias.

## 2 Principio de Hamilton

Los sistemas holónomos conservativos (o con potenciales dependientes de la velocidad como el que ya hemos visto) evolucionan de tal manera de hacer estacionaria la funcional **acción**

$$S[q_\mu(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_\mu, \dot{q}_\mu, t) dt$$

entre configuraciones inicial y final fijas. Este es el **Principio de Hamilton** (a veces llamado Principio de *mínima acción*). En efecto, el enunciado implica que la evolución del sistema satisfará las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0, \quad \mu = 1, \dots, n$$

Alternativamente, podríamos trabajar con  $3N$  coordenadas  $q_k$ , junto con los  $m$  vínculos holónomos  $G_a(q_k, t)$ , y los respectivos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_a$ . Entonces, partiendo de la acción

$$S[q_k(t), \lambda_a(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left( L(q_k, \dot{q}_k, t) + \sum_{a=1}^m \lambda_a G_a(q_k, t) \right) dt,$$

la variación de las funciones  $q_k(t)$ ,  $\lambda_a(t)$  conduciría a las  $3N + m$  ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{a=1}^m \lambda_a \frac{\partial G_a}{\partial q_k} &= 0, & k = 1, \dots, 3N \\ G_a(q_k, t) &= 0, & a = 1, \dots, m \end{aligned}$$

que son las ecuaciones que se obtuvieron cuando reintrodujimos las fuerzas de vínculo mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

La covariancia de las ecuaciones de Euler-Lagrange (el hecho que poseen una forma independiente de las coordenadas que se utilicen) no hace sino reflejar la **invariancia** de la acción ante cambios de coordenadas generalizadas,  $q_\mu \rightarrow q'_\mu = q'_\mu(q_1, \dots, q_n, t)$  (también llamadas transformaciones de punto o de contacto). En efecto, las ecuaciones de Euler-Lagrange provienen de hacer estacionaria la integral del Lagrangiano con respecto al tiempo. Pero el valor de esa integral es independiente de las coordenadas generalizadas que se utilicen para describir la configuración del sistema (es decir, el valor del integrando  $L = T - V$  no cambia frente a cambios de coordenadas generalizadas).

Nótese que el resultado del Principio variacional de Hamilton no se altera si agregamos al Lagrangiano  $L$  la derivada temporal de una función arbitraria  $M(q_\mu, t)$ :

$$L \rightarrow L + \frac{dM}{dt}$$

En tal caso la acción cambia por términos de borde:

$$S \rightarrow S + M |_{t=t_2} - M |_{t=t_1}$$

Los términos de borde no molestan porque el Principio involucra variaciones a extremos fijos,

$$\delta M |_{t=t_2} = 0 = \delta M |_{t=t_1}$$

Por lo tanto esos términos no contribuyen a la variación, ni tampoco aparecen en las ecuaciones de movimiento.

Veamos un ejemplo de esta situación. En la Clase 5 vimos que el Lagrangiano de una carga  $e$  en un campo electromagnético externo es  $L = T - U$  donde

$$U = e (\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

y  $\phi$ ,  $\vec{A}$  son los potenciales escalar y vectorial:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Como sabemos, los potenciales están definidos a menos de una *transformación de gauge*:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Ante una transformación de gauge, el potencial  $U$  en el Lagrangiano cambia según

$$U \rightarrow U - e \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \right) = U - e \frac{df}{dt}$$

Por lo tanto, el Lagrangiano cambia por una derivada temporal total, que no afecta el resultado de las ecuaciones dinámicas. Esto es lo esperado, pues la dinámica de la carga depende de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , que son invariantes de gauge.

Para finalizar, consideremos el cambio de la energía cinética de un sistema de partículas ante una transformación de Galileo. En la Clase 1 vimos que

$$T' = T - M \vec{V}_{CM} \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} M V^2,$$

que podemos escribir como

$$T' = T + \frac{d}{dt} \left( -M \vec{R}_{CM} \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} M V^2 t \right)$$

Por otra parte, las distancias no cambian ante transformaciones de Galileo; de modo que los potenciales que dependan de distancias no serán afectados. Esto significa que los Lagrangianos de la Mecánica Clásica evaluados en dos sistemas de referencia inerciales distintos (en un caso será  $L = T - V$ , y en el otro será  $L' = T' - V$ ) difieren en una derivada total. Entonces, si la acción que corresponde al primer sistema inercial es estacionaria, también lo será la acción que corresponde al otro sistema inercial. La misma evolución del sistema que hace estacionaria la acción en un sistema inercial, lo hará también en cualquier otro sistema inercial. Esta conclusión no es otra cosa que el **Principio de relatividad** ante transformaciones de Galileo.

## 2.1 ¿Máximo o mínimo?

La anulación de la variación de la acción a primer orden sólo dice que la acción es estacionaria sobre la evolución real del sistema. Para saber si estamos ante un máximo o un mínimo deberíamos analizar la variación al siguiente orden. Analicemos dos casos simples:

### 2.1.1 Movimiento unidimensional de la partícula libre

Sea  $\bar{x}(t)$  la evolución real de la partícula libre, es decir el movimiento rectilíneo uniforme. Si variamos este movimiento,  $\bar{x}(t) \rightarrow \bar{x}(t) + \delta x(t)$ , el Lagrangiano evaluado sobre la evolución variada resulta

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (\bar{v} + \delta\dot{x})^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + m \bar{v} \delta\dot{x} + \frac{1}{2} m \delta\dot{x}^2$$

Por tratarse de una variación a partir de la evolución real, sabemos que la acción no sufrirá cambios a primer orden (siempre que la variación se anule en los bordes:  $\delta x(t_1) = 0 = \delta x(t_2)$ ). A segundo orden el cambio es

$$\delta^2 S = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta\dot{x}^2 dt > 0$$

Por lo tanto, la acción evaluada sobre la evolución real es un mínimo. El mismo resultado se obtiene para potenciales lineales, como el potencial gravitatorio en la vecindad de la superficie terrestre.

### 2.1.2 Movimiento oscilatorio armónico unidimensional

En este caso, el Lagrangiano evaluado sobre una variación de la evolución real queda

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m (\bar{v} + \delta\dot{x})^2 - \frac{1}{2} k (\bar{x} + \delta x)^2$$

y la variación de la acción al segundo orden es

$$\delta^2 S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} m \delta\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k \delta x^2 \right) dt = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\delta\dot{x}^2 - \omega_o^2 \delta x^2) dt$$

Para juzgar el signo de  $\delta^2 S$  escojamos una variación  $\delta x(t)$  sencilla,

$$\delta x(t) = \epsilon \sin [\omega(t - t_1)]$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro infinitesimal, y  $\omega$  es la frecuencia de la variación (distinta de la frecuencia propia  $\omega_o = \sqrt{k/m}$  del oscilador). Luego es

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \delta x = \epsilon \omega \cos [\omega(t - t_1)]$$

Para que se cumpla la condición de contorno

$$\delta x(t_1) = 0 = \delta x(t_2)$$

tomaremos  $\omega = 2\pi/(t_2 - t_1)$ . Por lo tanto

$$\delta^2 S = \frac{m \epsilon^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\omega^2 \cos^2 [\omega(t - t_1)] - \omega_o^2 \sin^2 [\omega(t - t_1)]) dt = \frac{\pi m \epsilon^2}{2 \omega} (\omega^2 - \omega_o^2)$$

donde vemos que el signo de  $\delta^2 S$  puede ser tanto positivo como negativo, quedando en este caso supeditado a la relación entre el intervalo de integración  $t_2 - t_1 = 2\pi/\omega$  y el período del oscilador.

Como ejercicio, considérese el signo de  $\delta^2 S$  para la variación  $\delta x(t) = \epsilon(t - t_2)(t - t_1)$ , donde  $\epsilon$  es un parámetro infinitesimal.

### **Bibliografía adicional**

C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Dover.

<https://archive.org/details/VariationalPrinciplesOfMechanicsLanczos/mode/2up>

W. Yourgrau y S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, Dover.

<https://archive.org/details/variationalprinc0000your>