Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 7
15 de abril de 2021

Simetría y conservación. Teoremas de Noether

1 Coordenadas cíclicas

Supongamos que el Lagrangiano de un sistema físico, $L(q_\mu, \dot{q}_\mu, t)$ no depende de una determinada coordenada generalizada (pero depende de la respectiva velocidad generalizada). Diremos que esa coordenada es **cíclica**. Para fijar ideas, sea q_1 la coordenada cíclica. ¿Qué implicaría para la evolución del sistema? Si tomamos la ecuación de Lagrange correspondiente a $\mu = 1$ tendremos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = 0$$

pues $\partial L/\partial q_1 = 0$. Entonces obtenemos una ley de conservación:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{constante}$$

Será útil definir el **momento canónicamente conjugado** a q_μ :

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \ .$$

Si una coordenada es cíclica en el Lagrangiano, entonces se conserva su momento conjugado.

Las cantidades conservadas son primeras integrales de las ecuaciones de movimiento (combinaciones de las coordenadas y las velocidades). Su conocimiento previo ayuda a la integración de las ecuaciones.

1.1 Ejemplo

El Lagrangiano de una partícula libre es $L = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$; por lo tanto x, y, z son cíclicas. Entonces la evolución de una partícula libre conserva los valores de $p_x = m\dot{x}$,

$p_y = m\dot{y}$, $p_z = m\dot{z}$, que resultan ser las componentes de la cantidad de movimiento de la partícula.

1.1.1 Nota

No siempre la relación entre momentos conjugados y las cantidades de movimiento resulta tan directa como en el ejemplo anterior; eso depende de las coordenadas generalizadas que se utilicen. Más aun, si las velocidades participan en los potenciales entonces el momento conjugado recibirá contribuciones no sólo de la energía cinética sino también del potencial. Así, por ejemplo, para una carga e en un campo electromagnético externo, cuyo Lagrangiano es $L = (m/2)\ \vec{v}\cdot\vec{v} - e(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A})$ los momentos conjugados a x, y, z son

$$p_x = m\ \dot{x} + e\ A_x\ , \qquad p_y = m\ \dot{y} + e\ A_y\ , \qquad p_z = m\ \dot{z} + e\ A_z$$

En consecuencia, los momentos conjugados resultan depender del gauge que se elija para el campo externo.

Por ejemplo, si el campo externo es un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E\ \hat{\imath}$ podríamos usar el gauge $\phi = -E\ x$, $\vec{A} = 0$, tanto como $\phi = 0$, $\vec{A} = -E\ t\ \hat{\imath}$ (recordemos que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial\vec{A}/\partial t$). En el primer caso la coordenada x no es cíclica; entonces concluimos que no se conserva $p_x = m\ \dot{x}$ (pues hay aceleración en la dirección del campo). En el segundo caso x es cíclica; entonces se conserva $p_x = m\ \dot{x} - e\ E\ t$, que es una primera integral de movimiento. Integramos una vez, y obtenemos $x(t) = x_o + (p_x/m)t + (eE/m)t^2/2$.

2 Simetría y conservación

El caso de la coordenada cíclica es un ejemplo trivial de la relación entre *simetría y conservación*. La existencia de una coordenada cíclica q implica una **simetría** del Lagrangiano: L no cambia ante la transformación

$$q(t) \to q(t) + \epsilon$$

donde ϵ es una constante. En efecto, la transformación no altera el valor de L pues, por un lado, q no participa en L, y por el otro lado $\dot{q}(t)$ no cambia porque ϵ es constante. Esta simetría de L vale para cualquier evolución $q(t)$, cumpla o no con las ecuaciones de Lagrange. La **conservación** de p, que se deriva de la simetría en cuestión, significa que p se mantiene constante a lo largo de la evolución real del sistema físico (aquella evolución $q(t)$ que satisface las ecuaciones de Lagrange).

3 Teorema de Noether

En 1918 Emmy Noether publicó dos teoremas acerca de la relación entre simetría y conservación en el contexto de las teorías de campos. Estos teoremas constituyen una piedra angular de la Física del siglo XX. Nosotros veremos aquí una versión del primer teorema adaptada al contexto de la Mecánica, y haremos alguna referencia al segundo teorema.

La relación entre simetría y conservación que surge de la existencia de coordenadas cíclicas es un aspecto muy parcial de esa relación, que mostrada de esa forma resulta fuertemente dependiente de las coordenadas generalizadas elegidas. Por ejemplo, el Lagrangiano de partícula libre en coordenadas cilíndricas, $L = (m/2)(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$, exhibe sólo dos coordenadas cíclicas mientras que las tres coordenadas cartesianas son cíclicas. Entonces, trataremos de enfocar la cuestión de fondo, en una forma que no dependa de las coordenadas generalizadas que se elijan.

Como sabemos, la acción $S[q_\mu(t)]$ es estacionaria sobre la evolución *específica* que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, sujeta a valores dados en t_1 y t_2. Esto significa que una variación *arbitraria* $\delta q(t)$ de esta solución, sin variación en los extremos, no produce cambios de la acción a primer orden ($\delta S = 0$). Por otro lado, la acción posee una simetría si su valor sobre evoluciones *arbitrarias* es invariante (no cambia) ante ciertas variaciones *específicas* $\delta_s q(t)$.

Para que $\delta_s q_\mu(t)$ sea una simetría del Lagrangiano (y, por lo tanto, de la acción) hace falta que $\delta_s L = 0$ sobre evoluciones arbitrarias. Podemos ampliar esta definición de simetría permitiendo que $\delta_s L$ sea igual a una derivada temporal total. En ese caso la acción cambia por términos de borde que no afectan las ecuaciones dinámicas (tendremos una simetría de las ecuaciones). Entonces la situación de simetría más general es que exista una transformación específica $\delta_s q_\mu(t)$ tal que

$$\delta_s L = \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{1}$$

para alguna función $\varepsilon(q, \dot{q}, t)$. Para simetrías continuas, que se pueden descomponer en una sucesión de transformaciones infinitesimales como ocurre con las traslaciones y las rotaciones,[1] $\delta_s L$ se escribe como

$$\delta_s L = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu}\ \delta_s q_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\ \delta_s \dot{q}_\mu \right) = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu}\ \delta_s q_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\ \frac{d}{dt}\delta_s q_\mu \right)$$

Entonces $\delta_s q_\mu(t)$ es una simetría si

$$\sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu}\ \delta_s q_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\ \frac{d}{dt}\delta_s q_\mu \right) = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Veamos qué sucede cuando este resultado se aplica sobre las ecuaciones de movimiento, donde vale que $\partial L/\partial q_\mu = d(\partial L/\partial \dot{q}_\mu)/dt$. Reemplazando se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\ \delta_s q_\mu - \varepsilon \right) = 0$$

Es decir que a lo largo de la evolución real del sistema físico se conserva la cantidad

$$Q(q, \dot{q}, t) \equiv \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu\ \delta_s q_\mu - \varepsilon$$

[1] A diferencia de las transformaciones discretas como, por ejemplo, $q \to -q$.

Veremos dos ejemplos importantes que involucran un sistema aislado de partículas que interactúan a través de potenciales que dependen de las distancias entre las mismas. En ese caso el Lagrangiano del sistema será invariante ante traslaciones y rotaciones:

1) Traslación. En una traslación los vectores posición $\vec{r}_i$ sufren un mismo desplazamiento $\vec{\xi}$ fijo (independiente del tiempo): $\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{\xi}$. Por lo tanto las velocidades $\vec{v}_i$ no cambian:

$$\delta_s \vec{r}_i = \vec{\xi}\ , \qquad \Rightarrow \qquad \delta_s \vec{v}_i = 0$$

Para su uso en las ecuaciones previas, $\vec{\xi}$ debe verse como un desplazamiento infinitesimal. La traslación es una simetría del Lagrangiano del sistema aislado porque no afecta la energía cinética (las velocidades no cambian) ni tampoco la energía potencial (las distancias entre partículas no cambian).

2) Rotación. En una rotación de ángulo fijo todas las posiciones y velocidades cambian de dirección en la misma forma. Pero esto no afecta ni los módulos de las velocidades, que entran en la energía cinética, ni las distancias entre partículas. Por lo tanto la rotación es una simetría del Lagrangiano de un sistema aislado. Una rotación de ángulo infinitesimal $\delta\alpha$ fijo (independiente de t) se escribe

$$\delta_s \vec{r}_i = \delta\vec{\alpha} \times \vec{r}_i\ , \qquad \Rightarrow \qquad \delta_s \vec{v}_i = \delta\vec{\alpha} \times \vec{v}_i$$

donde $\delta\vec{\alpha}$ tiene la dirección del eje de rotación (véase la rotación infinitesimal de un versor en la Clase 1).

Está claro que un campo externo rompería total o parcialmente estas simetrías, porque establecería direcciones privilegiadas en el espacio, y los distintos puntos del espacio se distinguirían por el valor del potencial externo. Pero las simetrías ante traslaciones y rotaciones que caracterizan los sistemas aislados no son tan sólo una consecuencia de la ausencia de campos externos, sino de la **homogeneidad e isotropía** atribuidas al espacio físico en la Mecánica Clásica (aceptamos que el espacio físico cumple los axiomas de la geometría plana de Euclides). Por lo tanto, las leyes de conservación que vamos a obtener pueden verse como una consecuencia de la homogeneidad e isotropía del espacio. Todo sistema físico aislado en un espacio isótropo y homogéneo poseerá seis primeras integrales de movimiento provenientes de las simetrías del espacio.[2]

Veamos cuáles son las respectivas magnitudes conservadas. Destaquemos que estas transformaciones de simetría son invariancias del Lagrangiano ($\delta_s L = 0$). Por lo tanto es $\varepsilon = 0$ en ambos casos, y las magnitudes conservadas tienen la forma $Q = \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu\ \delta_s q_\mu$. Si usamos como coordenadas generalizadas las componentes cartesianas de las posiciones de las partículas tendremos

$$Q = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot\ \delta_s \vec{r}_i$$

[2]Un sistema de cargas eléctricas no puede considerarse *aislado* porque emite radiación electromagnética que transporta energía y cantidad de movimiento.

1) Traslación.

$$Q = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \ \vec{\xi} = \vec{P} \cdot \vec{\xi}$$

Como $\vec{\xi}$ es arbitrario y constante en el tiempo, concluimos que las magnitudes conservadas son las componentes de la cantidad de movimiento total; es decir, se conserva el vector $\vec{P}$.

2) Rotación.

$$Q = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \ (\delta\vec{\alpha} \times \vec{r}_i) = \delta\vec{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \delta\vec{\alpha} \cdot \vec{L}_o$$

donde usamos la propiedad cíclica del producto mixto. Como $\delta\vec{\alpha}$ es arbitrario y constante en el tiempo, concluimos que las magnitudes conservadas son las tres componentes del momento angular total; es decir, se conserva el vector $\vec{L}_o$ (en este caso O es el origen de coordenadas, pero podría ser cualquier punto fijo del sistema de referencia).

Así, las conservaciones de la cantidad de movimiento total y el momento angular total de sistemas aislados pueden verse como una consecuencia de la homogeneidad e isotropía del espacio.

4 Conservación asociada a la homogeneidad del tiempo.

Los sistemas cuyos Lagrangianos no dependen explícitamente del tiempo dan lugar a un teorema de conservación. Calculemos la derivada temporal de L:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu} \ \dot{q}_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \ \ddot{q}_\mu \right)$$

Sobre la evolución real del sistema vale que $\partial L/\partial q_\mu = d(\partial L/\partial \dot{q}_\mu)/dt$. Entonces

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \ \dot{q}_\mu \right)$$

es decir,

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

donde hemos definido

$$H \equiv \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \ \dot{q}_\mu - L$$

Si L no depende explícitamente del tiempo es $\partial L/\partial t = 0$, y se obtiene que H se conserva.

Veamos que la conservación de H se puede obtener también a partir de una simetría de las ecuaciones de movimiento, que corresponde al reemplazo $q_\mu(t) \to q_\mu(t + \epsilon)$, donde ϵ es un parámetro infinitesimal que no depende del tiempo. La simetría se escribe así:

$$\delta_s q_\mu = \epsilon \ \dot{q}_\mu \qquad \Rightarrow \qquad \delta_s \dot{q}_\mu = \epsilon \ \ddot{q}_\mu$$

En efecto, el cambio del Lagrangiano ante esa transformación es

$$\delta_s L = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu}\ \delta_s q_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\ \delta_s \dot{q}_\mu \right) = \epsilon \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu}\ \dot{q}_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\ \ddot{q}_\mu \right) = \epsilon\ \left(\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} \right)$$

Si L no depende explícitamente del tiempo ($\partial L/\partial t = 0$), entonces $\delta_s L$ es una derivada temporal total (1) con $\varepsilon = \epsilon L$. Entonces se conserva

$$Q = \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu\ \delta_s q_\mu - \varepsilon = \epsilon\ \left(\sum_{\mu=1}^{n} p_\mu\ \dot{q}_\mu - L \right) = \epsilon\ H$$

Así reobtenemos la conservación de H partiendo de una simetría.

La simetría asociada a la conservación de H corresponde a la traslación temporal. Es una simetría propia de cualquier sistema donde las interacciones (internas y externas) no dependan del tiempo. Pero es consecuencia también de la **homogeneidad** que atribuimos al **tiempo** de la Mecánica Clásica. Supone que el resultado de un experimento realizado hoy no debería cambiar si el mismo experimento se realizara dentro de cientos de millones de años. La naturaleza atribuida al espacio y el tiempo en la Mecánica Clásica son decisivos en los teoremas de conservación de $\vec{P}$, $\vec{L}$ y H.

4.1 ¿Cuándo coincide H con la energía mecánica E?

En varios casos de interés resulta $H = E$. Sea un sistema con vínculos holónomos y esclerónomos. Entonces

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_\mu) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\mu}\ \dot{q}_\mu$$

(pues $\partial \vec{r}_i/\partial t = 0$). Entonces $v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$ será una función cuadrática y homogénea de las velocidades generalizadas, y otro tanto sucederá con la energía cinética T.[3] En ese caso vale que

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\ \dot{q}_\mu = 2T$$

Si además V no depende de las velocidades generalizadas, entonces $p_\mu = \partial L/\partial \dot{q}_\mu = \partial T/\partial \dot{q}_\mu$. Entonces H resulta ser

$$H = \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu\ \dot{q}_\mu - L = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\ \dot{q}_\mu - L = 2T - L = T + V = E$$

La conservación de la energía mecánica de un sistema donde las fuerzas provienen de potenciales independientes del tiempo puede verse como una consecuencia de la homogeneidad del tiempo.

[3] $T = \sum_\nu \sum_\mu m_{\mu\nu}(q)\ \dot{q}_\mu\ \dot{q}_\nu$ donde $m_{\mu\nu}(q) = \sum_{i=1}^{N}\ m_i\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\mu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}$.

4.1.1 Ejemplo

Veamos un ejemplo donde H no coincide con E. En el problema del elevador que asciende con velocidad constante V, el vínculo es $z = Vt$ (ver Clase 3). El Lagrangiano es

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + V^2) - mgVt$$

Nótese que la energía cinética no es cuadrática y homogénea en las velocidades generalizadas $\dot{x}$, $\dot{y}$ debido a que el vínculo es reónomo. H es igual a

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \, \dot{q}_\mu - L = m\dot{x} \;\; \dot{x} + m\dot{y} \;\; \dot{y} - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + V^2) + mgVt \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - V^2) + mgVt \neq E \end{aligned}$$

Como L depende explícitamente de t, entonces H no se conserva. En este caso tampoco se conserva E, porque la fuerza de vínculo realiza trabajo.

5 Segundo teorema de Noether. Simetrías de gauge

Cuando la simetría del Lagrangiano no es "rígida" sino que contiene funciones arbitrarias del tiempo, resultarán otras propiedades. Por ejemplo, consideremos un sistema descripto por coordenadas q_1, q_2 cuyo Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} \, (\dot{q}_1 - q_2)^2$$

que posee la simetría

$$\delta_s q_1 = \epsilon(t) \; , \qquad \delta_s q_2 = \dot{\epsilon}(t)$$

donde ahora $\epsilon(t)$ no es una constante sino que es una *función* arbitraria. Esto es un aspecto típico de las **simetrías de gauge**.

Las ecuaciones de Lagrange de este sistema son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{q}_1 - q_2) &= 0 \\ (\dot{q}_1 - q_2) &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones de movimiento no son independientes. Por lo tanto no alcanzan para determinar la evolución de las dos variables dinámicas; la solución general contiene una función arbitraria:

$$q_1(t) = f(t) \; , \qquad q_2(t) = \dot{f}(t)$$

que puede ser fijada mediante una "**elección de gauge**".[4]

[4] Como la dinámica de q_1 está contenida en la ecuación para q_2 (la ecuación dinámica para q_1 no agrega nueva información), lo correcto es fijar el gauge eligiendo q_1. Esta fijación de gauge puede hacerse a nivel del Lagrangiano.

Otro aspecto típico de este tipo de sistema es que las coordenadas y momentos no pueden ser elegidos libremente para caracterizar la configuración inicial del sistema. En nuestro ejemplo resulta que p_2 es idénticamente nulo. Esto es un vínculo sobre los momentos, que evidencia otra vez que los dos grados de libertad q_1 y q_2 están ligados entre sí. Además, las ecuaciones del ejemplo dicen que $p_1 = \dot{q}_1 - q_2$ no puede valer otra cosa que cero. En síntesis, las simetrías de gauge conducen a relaciones entre las ecuaciones de movimiento (también puede haberlas con las derivadas de las ecuaciones de movimiento), que implican **libertades de gauge** para algunos grados de libertad. El segundo teorema de Noether se ocupa de las teorías de campo que poseen este tipo de comportamiento.[5]

Bibliografía

E. Noether, "Invariante Variationsprobleme", Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235–257 (1918).

Traducido al inglés en arxiv.org/pdf/physics/0503066v1.pdf

M. Bañados e I. Reyes, "A short review on Noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms", IJMP D 25 (10) 1630021 (2016). arxiv.org/pdf/1601.03616.pdf

[5]Las ecuaciones de Maxwell para los potenciales pueden obtenerse de una acción $S[\phi, \vec{A}]$ que posee simetría de gauge. Las ecuaciones dicen que los campos $\vec{C}_1 \doteq \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ y $\vec{C}_2 \doteq \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_o \epsilon_o \, \partial \vec{E}/\partial t$ se anulan en ausencia de fuentes. Estos campos están ligados por la identidad $\mu_o \epsilon_o \, \partial \vec{C}_1/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_2 \equiv 0$. En consecuencia las ecuaciones dinámicas no determinan completamente los potenciales (los potenciales poseen "libertades de gauge"). Cuando existen fuentes, esta identidad impone la ecuación de continuidad para las fuentes.