Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 8
19 de abril de 2021

Sistema de dos cuerpos
Fuerzas centrales

1 Sistema de dos cuerpos

Consideremos un sistema aislado de dos cuerpos que interactúan a través de un potencial dependiente de la distancia entre los mismos,

$$L = \frac{1}{2}\, m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, v_2^2 \; - V(|\vec{r}|)$$

donde

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Como el sistema está aislado podemos escoger un sistema de referencia inercial con origen en el CM. En ese sistema de referencia vale que

$$m_1\, \vec{r}_1 + m_2\, \vec{r}_2 = 0$$

Podemos usar las dos últimas ecuaciones para resolver $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en función de $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2\, \vec{r}}{m_1 + m_2}\ , \qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1\, \vec{r}}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

Por lo tanto

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2\, \dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2}\ , \qquad \vec{v}_2 = -\frac{m_1\, \dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2}$$

donde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Reemplazando en el Lagrangiano,

$$L = \frac{1}{2}\, m_1\, \frac{m_2^2\, |\dot{\vec{r}}|^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{1}{2}\, m_2\, \frac{m_1^2\, |\dot{\vec{r}}|^2}{(m_1 + m_2)^2} \; - V(|\vec{r}|) = \frac{1}{2}\, \mu\, |\dot{\vec{r}}|^2 \; - V(|\vec{r}|)$$

donde

$$\mu \equiv \frac{m_1\ m_2}{m_1 + m_2}$$

es la **masa reducida** del sistema. Esto muestra que la dinámica del sistema de dos partículas se obtiene del estudio de una única partícula de masa μ en presencia de un **campo central** $V(r)$ ($r = |\vec{r}|$; la fuerza $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -dV/dr\ \hat{r}$ es radial respecto del origen de coordenadas). Resolviendo la evolución $\vec{r}(t)$ de la partícula μ reconstruiremos las evoluciones de m_1 y m_2 mediante las ecuaciones (1).

En un campo central no hay torque respecto del origen de coordenadas O. Por lo tanto se conserva el momento angular respecto de O. En particular, la conservación de la dirección de $\vec{L}_O$ implica que el movimiento se realiza en el plano perpendicular a $\vec{L}_O$. Describiremos la posición de la partícula μ mediante coordenadas polares en ese plano, de modo que

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\ (r\ \hat{r}) = \dot{r}\ \hat{r} + r\ \dot{\varphi}\ \hat{\varphi}$$

y el Lagrangiano queda

$$L = \frac{1}{2}\ \mu\ (\dot{r}^2 + r^2\ \dot{\varphi}^2\ )\ - V(r)$$

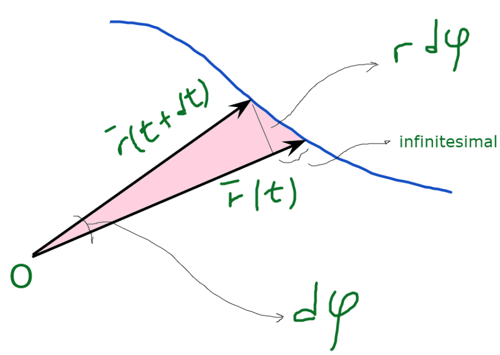
Como la coordenada φ es cíclica, entonces se conserva

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu\ r^2\ \dot{\varphi}$$

que es el módulo del momento angular.

2 Segunda Ley de Kepler

En la Figura podemos ver que el área infinitesimal barrida por el vector posición es



$dA = \frac{1}{2}\ base \times altura = \frac{r^2\ d\varphi}{2}$

y la "velocidad areolar" es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{2\ \mu} = const.$$

Es decir que la conservación de p_φ implica que la velocidad areolar es constante, que es la Segunda Ley de Kepler (la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales).

3 Integración

La constante de movimiento p_φ será llamada ℓ en alusión al momento angular:

$$\ell = \mu\ r^2\ \dot{\varphi} \tag{2}$$

Además se conserva la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2}\ \mu\ (\dot{r}^2 + r^2\ \dot{\varphi}^2\ )\ + V(r)$$

Podemos utilizar la conservación del momento angular para reemplazar $\dot{\varphi}$ en la expresión de E: [1]

$$E = \frac{1}{2}\ \mu\ \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\ + V(r) \tag{3}$$

Así obtenemos una relación entre $\dot{r}$ y r que puede ser integrada,

$$\int_{t_o}^{t(r)} dt = \pm \int_{r_o}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V(r)] - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2}}}\ ,$$

para obtener la evolución radial $r(t)$ (el signo negativo se usa para integrar en los tramos donde $dr/dt < 0$). Conocida la función $r(t)$ se reemplazaría en (2) para obtener $\varphi(t)$ mediante una integración. De esa forma, el problema del movimiento de la partícula μ estaría resuelto.

Si en lugar de la evolución temporal nos interesara la trayectoria orbital ($\ell \neq 0$), es decir la función $\varphi(r)$, podríamos reemplazar en (3)

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\ \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\ \frac{\ell}{\mu r^2}\ ,$$

donde usamos (2). Así la integración nos daría[2]

$$\int_{\varphi_o}^{\varphi(r)} d\varphi = \pm \int_{r_o}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2\mu\ell^{-2}\ [E - V(r)]\ r^4 - r^2}} \tag{4}$$

[1]No sería correcto reemplazar $\dot{\varphi}$ en el Lagrangiano, y derivarlo luego para obtener la dinámica radial. Las constantes de movimiento resultan de una primera integración de las ecuaciones de movimiento. Después de obtenidas, podemos combinarlas para terminar de integrar el problema.

[2]Las *integrales elípticas* tienen la forma $\int R(x, P(x)^{1/2})\ dx$ donde R es una función racional de sus argumentos, y $P(x)$ es un polinomio en x de grado 3 o 4. La integral en (4) es elíptica si $V(r) = r^n$ con $-4 \leq n \leq 2$.

4 Potencial efectivo

En la expresión (3) para E vemos que el término asociado a ℓ, que proviene del movimiento orbital, podría pensarse como una contribución al potencial. Podríamos decir que la energía E exhibe un potencial efectivo

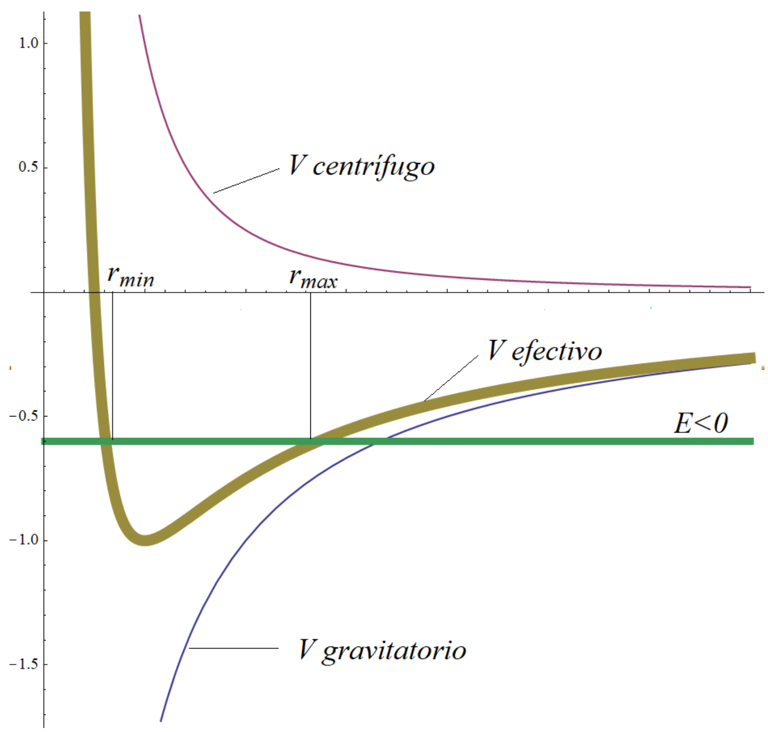
$$V_{efec} = V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

El término orbital se llama **potencial centrífugo**, pues de él se obtiene la fuerza centrífuga,

$$-\vec{\nabla}\left(\frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right) = \frac{\ell^2}{\mu\ r^3}\ \hat{r} = \frac{\mu^2\ r^4\ \dot{\varphi}^2}{\mu\ r^3}\ \hat{r} = \mu\ r\ \dot{\varphi}^2\ \hat{r}$$

La energía mecánica escrita como $E = \mu\ \dot{r}^2/2 + V_{efec}(r)$ tiene la forma de la energía de un movimiento unidimensional en un potencial $V_{efec}(r)$. Así, el movimiento radial de la partícula μ podría entenderse en términos de este potencial.

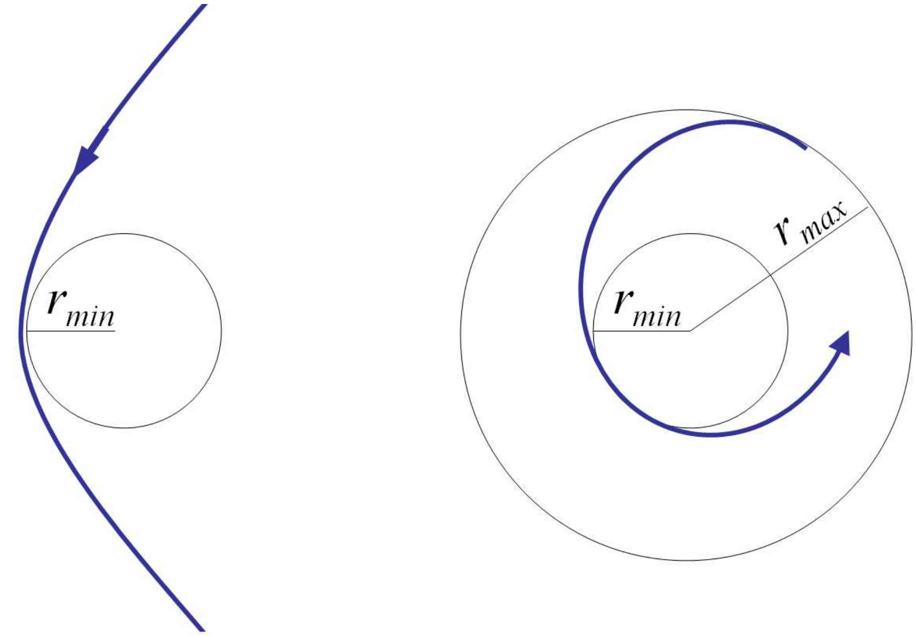
Por ejemplo, si la partícula orbita ($\ell \neq 0$) en un campo gravitatorio el potencial efectivo será como el que muestra la Figura:



Si $E \geq 0$ el radio evolucionará entre un $r_{\min}$ y $r = \infty$ (movimiento no ligado). En cambio, si $E < 0$ el movimiento radial quedará confinado entre un radio mínimo $r_{\min}$ y un radio máximo $r_{\max}$ (movimiento ligado). Los “puntos de retorno” del potencial efectivo no significan que el movimiento se detiene, pues la partícula continúa su movimiento orbital para conservar el momento angular. Significan que el crecimiento o decrecimiento del radio se detiene ($\dot{r} = 0$); pero el ángulo sigue avanzando.[3]

[3] En los puntos de retorno se anula el radicando en la ecuación (4). Esta anulación no implica un mal comportamiento de la integral; mediante un desarrollo en serie de Taylor se obtiene que el radicando es lineal en $r - r_{\min}$ o en $r - r_{\max}$ según sea el caso.

En el plano orbital, los movimientos ligados y no ligados se ven como en la siguiente Figura:



Movimiento no ligado

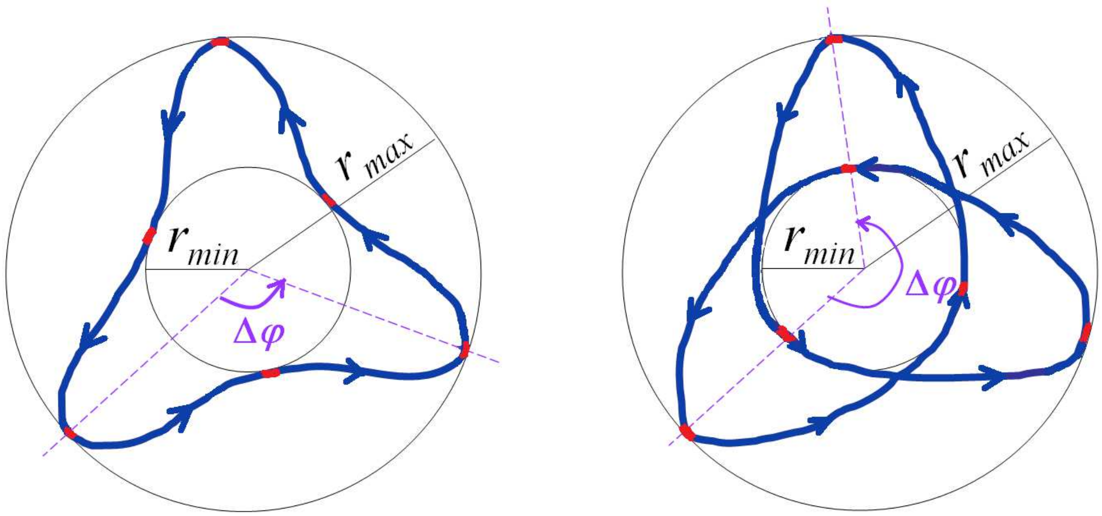
Movimiento ligado

En el caso ligado la órbita se cerrará o no dependiendo del tipo de potencial. En efecto, el ángulo barrido mientras la partícula va desde $r_{\max}$ a $r_{\min}$ y vuelve a $r_{\max}$ es (ver (4))

$$\Delta\varphi = -\int_{r_{\max}}^{r_{\min}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu(E-V)}{\ell^2}\ r^4 - r^2}} + \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu(E-V)}{\ell^2}\ r^4 - r^2}} = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu(E-V)}{\ell^2}\ r^4 - r^2}}$$

Si $\Delta\varphi$ fuera un múltiplo de 2π entonces la órbita se cierra, pues el radio regresa a su valor máximo al cabo de un número entero de giros. Si $\Delta\varphi$ fuera un submúltiplo de 2π, $\Delta\varphi = 2\pi/k$, la órbita se cerrará al cabo de k oscilaciones del radio. En un caso general, si al cabo de k oscilaciones del radio se completan m giros, $\Delta\varphi\ k = 2\pi\ m$, entonces la órbita será cerrada (ver Figura). Que este sea o no el resultado de la integral (5) depende del potencial $V(r)$. Los puntos donde se anula $\dot{r}$ (marcados en rojo en la Figura) se llaman **puntos absidales**. Como vimos en la ecuación (5) el ángulo barrido para ir desde $r_{\min}$ hasta $r_{\max}$ es igual al que se barre para ir desde $r_{\max}$ hasta $r_{\min}$. Lo mismo sucede al ir desde $r_{\min}$ hasta un $r < r_{\max}$ o al revés. Esto significa que las órbitas (sean o no cerradas) son simétricas respecto de los puntos absidales. Si elegimos $\varphi = 0$ en un punto absidal, digamos en $r = r_{\min}$, entonces la ecuación (4) dice que $\varphi(r)$ para r entre $r_{\min}$ y el siguiente punto absidal es

$$\varphi(r) = \int_{r_{\min}}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2\mu\ell^{-2}\ [E - V(r)]\ r^4 - r^2}} \tag{5}$$



$3\ \Delta\varphi = 2\pi$ $\qquad\qquad$ $3\ \Delta\varphi = 4\pi$

Existen dos tipos de potenciales centrales cuyas órbitas ligadas son todas cerradas:

$$V(r) \propto \frac{1}{r}\ , \qquad\qquad V(r) \propto r^2$$

En el caso del potencial elástico isótropo $V(r) = (1/2)\ k\ r^2$ es fácil ver que es así. La fuerza es $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -k\ r\ \hat{r} = -k\ \vec{r}$. Las ecuaciones de movimiento para las componentes cartesianas de $\vec{r}(t) = x(t)\ \hat{\imath} + y(t)\ \hat{\jmath}$ son

$$-kx = m\ddot{x}\ , \qquad -ky = m\ddot{y}$$

que muestran dos oscilaciones de la misma frecuencia $\omega_o = \sqrt{k/m}$. Por ejemplo, una solución particular es

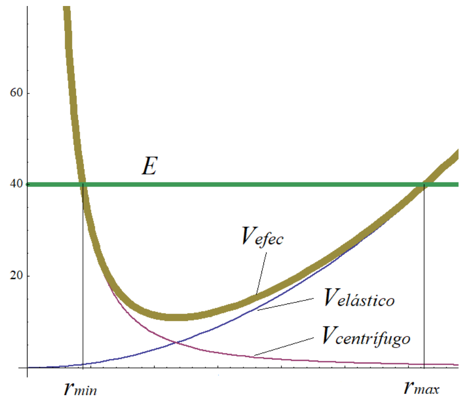
$$x = A\ \cos\omega_o t\ , \qquad y = B\ \sin\omega_o t$$

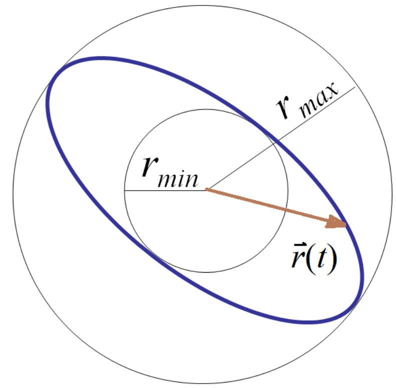
que corresponde a una elipse cuyos ejes coinciden con los ejes cartesianos:[4]

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Pero como el potencial es isótropo, dependiendo de las condiciones iniciales obtendremos también elipses con los ejes orientados en otras direcciones (ver Figura).

[4]La elipse está centrada en el origen del vector $\vec{r}$, de modo que el ángulo barrido entre dos máximos de r sucesivos es $\Delta\varphi = \pi$.





4.1 Órbita circular

Si el potencial efectivo tiene un mínimo, y el valor de E coincide con el valor mínimo de V_{efec} , entonces $r_{\min} = r_{\max} \equiv r_{circ}$. La órbita será circular de radio r_{circ} tal que

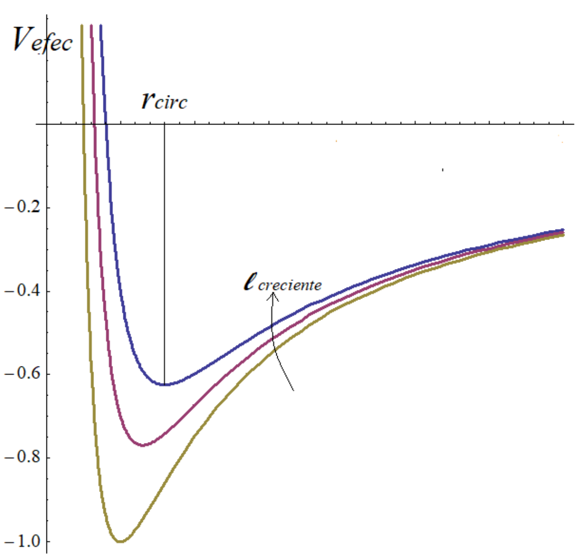
$$\frac{dV_{efec}}{dr}|_{r=r_{circ}} = 0$$

Por cierto, en ese caso tendremos una órbita cerrada independientemente de las demás características del potencial. Debemos recordar que el potencial efectivo depende de las condiciones iniciales a través de ℓ; es decir, para cada valor de ℓ hay un potencial efectivo. Para cada valor de ℓ tal que V_{efec} alcance un valor mínimo habrá una órbita circular.

El potencial gravitatorio tiene la forma $V = -\alpha/r$. El radio de la órbita circular es

$$r_{circ} = \frac{\ell^2}{\alpha\ \mu}$$

La Figura muestra los potenciales efectivos del caso gravitatorio para distintos valores de ℓ.



La clase que viene resolveremos las órbitas del potencial gravitatorio.