Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 9
22 de abril de 2021

Problema de Kepler

1 Problema de Kepler

Para resolver la forma de la órbita $\varphi(r)$ en el caso gravitatorio, debemos calcular la integral

$$\varphi(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{2\mu\ell^{-2}\ [E - V(r)]\ r^4 - r^2}}$$

con el potencial

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Como el potencial gravitatorio es atractivo, entonces es $\alpha > 0$. La solución servirá también para la interacción atractiva coulombiana, o para la repulsión coulombiana si cambiamos el signo de α.

Para calcular la integral es conveniente hacer un cambio de variable:

$$u \equiv \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad du = -\frac{dr}{r^2}$$

Llevando r^4 fuera de la raíz, y reemplazando $V(u) = -\alpha u$ obtenemos

$$\varphi(u) = -\int \frac{du}{\sqrt{2\mu\ell^{-2}\ (E + \alpha\ u) - u^2}}$$

Podemos llamar

$$a \equiv 2\mu\ell^{-2}\ E\ , \qquad b \equiv 2\mu\ell^{-2}\ \alpha\ .$$

Así tenemos

$$-\varphi(u) = \int \frac{du}{\sqrt{a + b\ u - u^2}} = \arccos\left(\frac{2\ u - b}{\sqrt{b^2 + 4\ a}}\right) + cte$$

Resolviendo para u:

$$\frac{1}{r} = u = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4\ a}\ \cos(\varphi + cte)$$

Recordemos que hemos elegido el signo de la raíz correspondiente a un tramo de r creciente. Para fijar $\varphi = 0$ cuando $r = r_{\min}$ (es decir, cuando u es máximo), debemos anular la *cte* de integración; entonces, restableciendo los valores de a y b:[1]

$$\frac{\ell^2}{\mu\ \alpha}\ \frac{1}{r} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\ \ell^2 E}{\mu\ \alpha^2}}\ \cos\varphi \tag{1}$$

Antes de averiguar qué tipo de trayectoria es esta, veamos que el mismo resultado se obtiene por otra vía.

2 Ecuación de Binet

Ya dijimos que la evolución radial de la masa reducida μ se podía entender a la luz del potencial efectivo. Entonces podemos escribir la ecuación[2]

$$\mu\ \ddot{r} = -\frac{dV_{efec}}{dr}$$

Atendiendo a la forma del potencial efectivo, y llamando $f(r) = -dV/dr$,

$$\mu\ \ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu\ r^3} + f(r) \tag{2}$$

Como nos interesa la órbita $r(\varphi)$, necesitamos una ecuación en la variable φ. Para ello nos valemos de la conservación de p_φ, que lleva a

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu\ r^2}$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} = \dot{\varphi}\ \frac{d}{d\varphi} = \frac{\ell}{\mu\ r^2}\ \frac{d}{d\varphi}$$

Si además optamos por la variable $u \equiv r^{-1}$, entonces

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\ \frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2}\ \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\ \frac{\ell}{\mu\ r^2}\ \frac{du}{d\varphi} = -\frac{\ell}{\mu}\ \frac{du}{d\varphi}$$

Por lo tanto

$$\ddot{r} = \frac{\ell}{\mu\ r^2}\ \frac{d}{d\varphi}\ \dot{r} = -\frac{\ell^2 u^2}{\mu^2}\ \frac{d^2 u}{d\varphi^2}$$

[1] b^2 sale fuera de la raíz como $|b|$. Si $\alpha < 0$ (potencial coulombiano repulsivo) es $b < 0$. Entonces resulta

$$-\frac{\ell^2}{\mu\ |\alpha|}\ \frac{1}{r} = 1 - \sqrt{1 + \frac{2\ \ell^2 E}{\mu\ \alpha^2}}\ \cos\varphi$$

[2] Por supuesto, la ecuación no es más que la derivada de $E = (1/2)\ \mu\ \dot{r}^2 + V_{efec}(r)$.

reemplazando este resultado en la ecuación (2) obtenemos la **ecuación de Binet**

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{\mu}{\ell^2 u^2}\ f\left(\frac{1}{u}\right) = 0$$

Esta ecuación es válida para cualquier potencial central. Si elegimos el origen del ángulo φ en un punto absidal donde r es mínimo (u es máximo), tendremos las siguientes condiciones de contorno

$$u(\varphi = 0) = u_{\max}\ , \qquad \frac{du}{d\varphi}(\varphi = 0) = 0$$

Vemos que tanto la ecuación como las condiciones de contorno son invariantes ante el cambio $\varphi \to -\varphi$. Esto significa que las órbitas son simétricas respecto de los puntos absidales.

En el caso gravitatorio es

$$f = -\frac{\alpha}{r^2} = -\alpha\ u^2$$

y la ecuación de Binet queda

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha\ \mu}{\ell^2}$$

cuya solución, con las condiciones de contorno dadas es

$$u = A\cos\varphi + \frac{\alpha\ \mu}{\ell^2}$$

donde la amplitud A de la oscilación radial queda determinada por el valor de la energía. Podemos reescribir la solución en la siguiente forma

$$\frac{\ell^2}{\mu\ \alpha}\ \frac{1}{r} = 1 + e\ \cos\varphi$$

donde e es una constante de integración. Este resultado es igual al obtenido en la ecuación (1), siendo[3]

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\ \ell^2 E}{\alpha^2 \mu}}$$

3 Secciones cónicas

La solución para la órbita barrida por el vector posición $\vec{r} = r\ \hat{r} = r\ (\cos\varphi\ \hat{\imath} + \sin\varphi\ \hat{\jmath})$ en el caso gravitatorio es una **sección cónica**. Las secciones cónicas son curvas planas que cumplen la ecuación

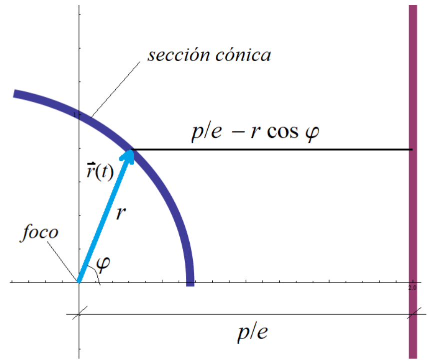
$$\frac{p}{r} = 1 + e\ \cos\varphi$$

que puede leerse así:

$$\frac{p}{e} - r\ \cos\varphi = \frac{r}{e}$$

Como muestra la Figura, $\frac{p}{e} - r\ \cos\varphi$ es la distancia de cada punto de la curva a una recta fija, mientras que r es la distancia de ese mismo punto a un punto F que llamaremos **foco**.

[3]Si $\alpha < 0$ (potencial coulombiano repulsivo) deberíamos optar por una constante de integración negativa o, equivalentemente, escribir el segundo miembro de la ecuación anterior como $1 - e\ \cos\varphi$.



Las secciones cónicas son curvas tales que el cociente entre esas dos distancias es constante a lo largo de la curva; su valor es e^{-1}. Según el valor de e, estas curvas son:

---

1) **circunferencia** $(e=0)$: $r = p = \frac{\ell^2}{\alpha\ \mu}, \qquad E = -\frac{\alpha^2 \mu}{2\ \ell^2}$

---

2) **elipse** $(0 < e < 1)$: $-\frac{\alpha^2\mu}{2\ \ell^2} < E < 0$, e es la *excentricidad* de la elipse

$r_{\rm min} = r|_{\varphi=0} = \frac{p}{1+e}$, $r_{\rm max} = r|_{\varphi=\pi} = \frac{p}{1-e} \quad (\frac{p}{2} < r_{\rm min} < p < r_{\rm max} < \infty)$

---

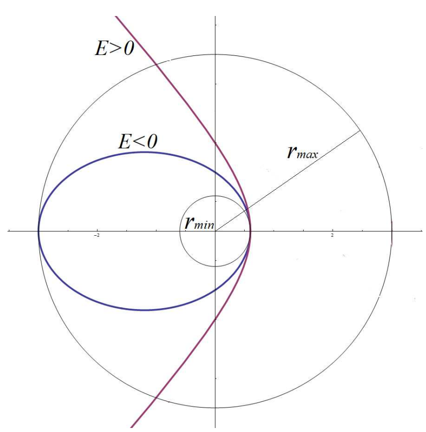
3) **parábola** $(e=1)$: $\quad E = 0, \quad r_{\rm min} = r|_{\varphi=0} = \frac{p}{2}$, $r_{\rm max} = r|_{\varphi=\pi} = \infty$

---

4) **hipérbola** $(e > 1)$: $\quad E > 0, \quad r_{\rm min} = r|_{\varphi=0} = \frac{p}{1+e} < \frac{p}{2}$,[4]

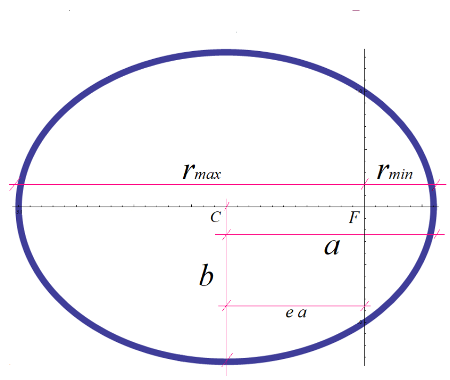
$r_{\rm max} = \infty$ se alcanza con $\varphi = \pm\varphi_\infty \equiv \pm \arccos[-1/e]$

La Figura muestra dos órbitas con el mismo valor de r_{min}; una de energía negativa y otra de energía positiva.[5]



[4]La ecuación para el potencial coulombiano repulsivo, $-p/r = 1 - e\ \cos\varphi$ $(e > 1,\ p > 0)$, también genera una trayectoria hiperbólica. La distancia mínima al foco es $r_{\rm min} = r|_{\varphi=0} = \frac{p}{e-1}$.

[5]Para tener un mismo $r_{min} = p/(1+e)$ con valores distintos de E se deben usar distintos valores de ℓ (se compensa el cambio en e con un cambio en p).



Veamos el caso de la elipse. En la Figura el semieje mayor de la elipse a es igual a

$$a = \frac{1}{2}\ (r_{\max} + r_{\min}) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}\right) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\frac{\ell^2}{\mu\ \alpha}}{-\frac{2\ \ell^2 E}{\alpha^2 \mu}} = -\frac{\alpha}{2\ E} \tag{3}$$

y la distancia entre el centro y el foco es

$$d_{CF} = a - r_{\min} = \frac{1}{2}\ (r_{\max} - r_{\min}) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-e} - \frac{p}{1+e}\right) = \frac{e\ p}{1-e^2} = a\ e$$

Por cierto, la elipse resulta más familiar cuando está escrita en coordenadas cartesianas con origen en el centro de la elipse C. El cambio de coordenadas polares con origen en el foco F a cartesianas con origen en C es[6]

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos\varphi + e\ a \\ y &= r\ \sin\varphi = r\ \sqrt{1-\cos^2\varphi} \end{aligned}$$

Calculemos la siguiente forma cuadrática:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= r^2\cos^2\varphi + 2\ e\ a\ r\ \cos\varphi + e^2 a^2 + \frac{r^2(1-\cos^2\varphi)}{1-e^2} \\ &= -\frac{e^2 r^2 \cos^2\varphi}{1-e^2} + 2\ e\ a\ r\ \cos\varphi + e^2 a^2 + \frac{r^2}{1-e^2} \end{aligned}$$

Como la ecuación de la elipse dice que $p - r = e\ r\ \cos\varphi$, entonces

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{(p-r)^2}{1-e^2} + 2\ a\ (p-r) + e^2 a^2 + \frac{r^2}{1-e^2}$$

y como $1 - e^2 = p/a$, entonces obtenemos que

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{a}{p}\ (p-r)^2 + 2\ a\ (p-r) + \left(1 - \frac{p}{a}\right)\ a^2 + \frac{a\ r^2}{p} = a^2$$

Así recuperamos la elipse de semieje mayor a ; el semieje menor es

$$b = a\ \sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{a\ p} = \frac{\ell}{\sqrt{2|E|\mu}}$$

[6]El foco F es el origen del vector posición $\vec{r} = r\ \cos\varphi\ \hat{\imath} + r\ \sin\varphi\ \hat{\jmath}$. No deben confundirse las coordenadas x, y con origen en C con las componentes cartesianas del vector posición.

4 Primera Ley de Kepler

En la interacción gravitatoria entre una estrella de masa $m_\star$ y un planeta de masa $m_p <<$ $m_\star$, las posiciones de la estrella y el planeta son

$$\vec{r}_P = \frac{m_\star \, \vec{r}}{m_\star + m_P} \approx \vec{r} \, , \qquad\qquad \vec{r}_\star = -\frac{m_P \, \vec{r}}{m_\star + m_P} \approx 0$$

1ra Ley: Las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de sus focos.[7]

5 Tercera Ley de Kepler

Teniendo en cuenta que el área de una elipse es

$$\acute{A}rea = \pi \; a \; b \; ,$$

y que la Segunda Ley de Kepler dice que la velocidad areolar es constante,

$$\frac{d\acute{A}rea}{dt} = \frac{1}{2} \, r^2 \, \dot{\varphi} = \frac{\ell}{2 \, \mu} \; ,$$

entonces el área de la elipse se barre en un tiempo T (período de la órbita)

$$T = \frac{\acute{A}rea}{\frac{d\acute{A}rea}{dt}} = \frac{\pi \; a \; b}{\frac{\ell}{2 \, \mu}} = \frac{\pi \; a^{3/2} \; p^{1/2}}{\frac{\ell}{2 \, \mu}} = 2 \, \pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \; a^{3/2}$$

Como $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ y $\alpha = G \; m_1 m_2$ es

$$T = \frac{2 \; \pi \; a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}$$

Cuando se trata de la interacción entre una estrella y un planeta, $m_1 + m_2$ se aproxima por la masa de la estrella. Por lo tanto T^2/a^3 no depende más que de la masa de la estrella.

3ra Ley: Los cuadrados de los períodos de las órbitas de los planetas son proporcionales a los cubos de los respectivos semiejes mayores de las órbitas.

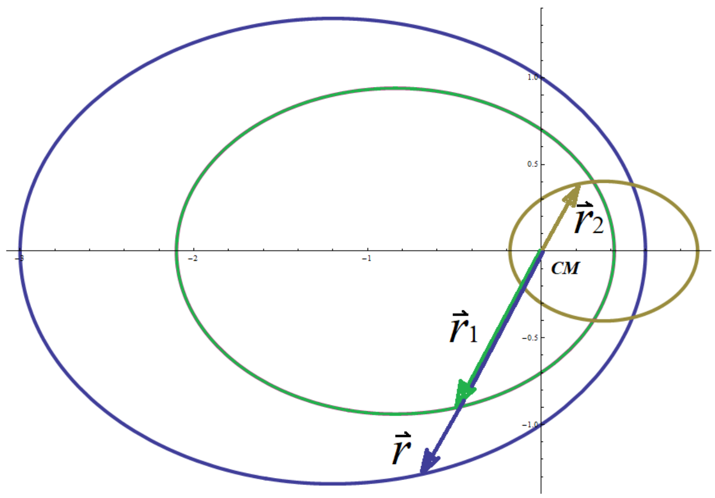
[7] También eran elípticas las órbitas del potencial elástico. Sin embargo, en aquel caso el centro de la elipse se ubicaba en el centro de fuerzas. En cambio, en el caso gravitatorio el centro de fuerzas coincide con un foco de la elipse. En términos del ángulo $\Delta\varphi$ entre dos $r_{\max}$ consecutivos, es $\Delta\varphi = \pi$ para el potencial elástico, y $\Delta\varphi = 2\pi$ para el potencial gravitatorio.

6 Regreso al problema de dos cuerpos

Habiendo resuelto la evolución $\vec{r}(t)$ de la masa reducida μ podemos recuperar los movimientos de cada una de las dos partículas:

$$\vec{r}_1(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, \vec{r}(t) \ , \qquad\qquad \vec{r}_2(t) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\, \vec{r}(t)$$

Como el extremo de $\vec{r}(t)$ describe una cónica, lo mismo harán los vectores $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$, cuyo origen está en el CM del sistema.



Material adicional

Puntos de Lagrange:
https://solarsystem.nasa.gov/resources/754/what-is-a-lagrange-point/

Problema de 3 cuerpos:
https://www.youtube.com/watch?v=et7XvBenEo8