Guía 3 - Problema de 2 cuerpos perturbado

Tomas Ferreira Chase

1 Ejercicio 3

Partimos del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} - \frac{c}{2r^2} \tag{1}$$

Dado que la coordenada θ es cíclica, tenemos la siguiente conservación

$$mr^2\dot{\theta} \equiv l = cte \tag{2}$$

que usaremos a lo largo del ejercicio. En particular, vamos a escribir a la energía mecánica del sistema utilizando esta ley de conservación para reemplazar la variable $\dot{\theta}$,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} + \frac{c}{2r^2} \tag{3}$$

Notemos que redefiniendo el momento angular podemos llegar a un problema análogo al de Kepler:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2 + mc}{2mr^2} - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\bar{l}^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \qquad \bar{l} \equiv \sqrt{l^2 + mc} \tag{4}$$

Vamos a despejar a $\dot{r}$ en la ecuación de la energía mecánica,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{\bar{l}^2}{m^2r^2} + \frac{2k}{mr}} \tag{5}$$

Como nos interesa la trayectoria de la *partícula*, vamos a hacer el siguiente cambio de variables[1]

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta}\frac{l}{mr^2} \tag{6}$$

Haciendo este cambio, ordenando toda la dependencia en r de un lado y toda la dependencia en θ del otro e integrando a ambos lados, llegamos a

$$\int d\theta = \frac{l}{m}\int \frac{dr}{r^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{\bar{l}^2}{m^2r^2} + \frac{2k}{mr}}} \tag{7}$$

[1] En este cambio de variables aparece el momento angular original, no el redefinido! Esto es lo que termina generando el cambio en la ecuación de la elipse.

Haciendo el cambio de variables

$$u = \frac{1}{r} \qquad du = -\frac{dr}{r^2} \tag{8}$$

la integral resulta

$$\theta = \frac{l}{m} \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{\bar{l}^2 u^2}{m^2} + \frac{2ku}{m}}} \tag{9}$$

Para resolverla utilizamos la siguiente integral de tablas (Eq. 3-54 del Goldstein),

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\gamma x^2 + \beta x + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos\left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right) \tag{10}$$

por lo que la integral anterior se reduce a

$$-\frac{\bar{l}}{l}\theta = \arccos\left(\frac{\frac{\bar{l}^2}{mr} - k}{\sqrt{k^2 + \frac{2E\bar{l}^2}{m}}} \right) \tag{11}$$

Despejando r de la ecuación anterior,

$$r(\theta) = \frac{\frac{\bar{l}^2}{km}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E\bar{l}^2}{k^2 m}} \cos\left(\frac{\bar{l}}{l}\theta\right)} \tag{12}$$

Escribamos esto en el lenguaje de las elipses. Definamos los siguientes parámetros

$$\begin{cases} e = \sqrt{1 + \frac{2E\bar{l}^2}{k^2 m}} \\ a = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{k}{2E} \end{cases} \tag{13}$$

donde e es la excentricidad, y r_1 y r_2 son los radios menor y mayor de la elipse. Estos radios se calculan despejando r en la ecuación de la energia mecánica para $\dot{r} = 0$.

Por último, definamos el siguiente parametro

$$\alpha = \frac{\bar{l}}{l} \tag{14}$$

Luego, multiplicando y dividiendo por a en la Ec. 12 llegamos a

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\alpha\theta)} \tag{15}$$

Notemos que si hacemos que la perturbación tienda a cero ($c \to 0$), tenemos que $\bar{l} \to l$ por lo que $\alpha \to 1$ y recuperamos la ecuación de la elipse.

En la figura 2 se pueden ver algunas trayectorias para distintos valores de α. Vemos que el efecto de la perturbación es una *precesión en el perihelio e.*

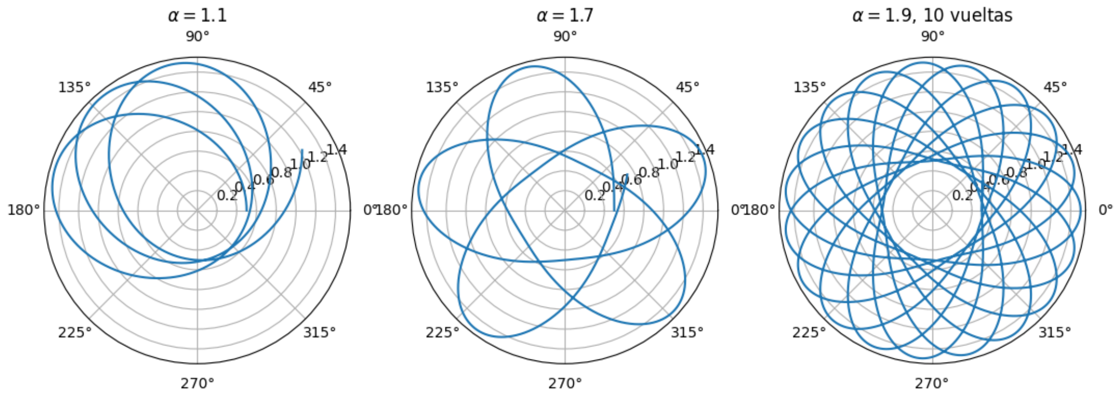

Figure 1: *Trayectorias para distintos valores de* α.

Nos podemos preguntar que condiciones se tienen que dar para que una órbita sea cerrada.

Para que la órbita sea cerrada, debería coincidir que cuando realice un número entero de ciclos k (cuando el coseno "haya dado k vueltas"), se haya realizado un número entero de vueltas m (cuando la variable angular haya dado m vueltas). Luego, la órbita va a ser cerrada si

$$\frac{\Delta\theta}{\alpha} = 2\pi\frac{m}{k} \longrightarrow \alpha = \frac{k}{m} \quad k, m \in \mathrm{Z} \tag{16}$$

Notemos que en el caso en que $\alpha = 1$ el número de vueltas de la variable angular coincide con el número de vueltas del coseno, por lo que siempre tenemos órbitas cerradas.

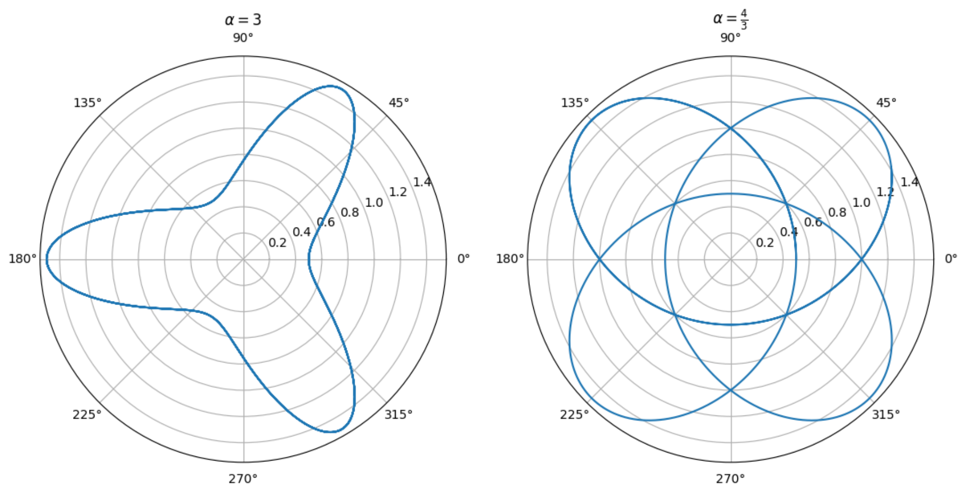

Figure 2: *Trayectoria cerradas, con* $\alpha = 3$ *en la izquierda y* $\alpha = \frac{4}{3}$ *a la derecha.*

Calculemos la velocidad de precesión. El ángulo de precesión θ^* lo vamos a definir como la diferencia entre un ciclo completo sin la perturbacion (2π) y el ciclo completo con la perturbacion ($\frac{2\pi}{\alpha}$). En un período τ el ángulo de precesión es entonces

$$\theta^*(\tau) = 2\pi - \frac{2\pi}{\alpha} \tag{17}$$

Si hubiera recorrido dos ciclos, θ^* lo definimos como la diferencia de dos ciclos sin perturbación (4π) menos dos ciclos con la perturbación ($\frac{4\pi}{\alpha}$)

$$\theta^*(2\tau) = 2(2\pi - \frac{2\pi}{\alpha}) \tag{18}$$

y así sucesivamente para N ciclos. Luego, en general vamos a tener que

$$\theta^*(t) = \frac{t}{\tau}(2\pi - \frac{2\pi}{\alpha}) \tag{19}$$

por lo que derivando en el tiempo y reacomodando todo un poco tenemos que

$$\dot{\theta}^* = \frac{2\pi}{\tau}\frac{\alpha - 1}{\alpha} \tag{20}$$

1.1 Nota histórica

En general, las órbitas de los planetas en un sistema solar no son estrictamente elípticas ya que el modelo de dos cuerpos no considera la influencia de los otros planetas sobre la órbita. Esta diferencia entre la órbita de dos cuerpos y la órbita *real* de los planetas se puede modelar bien con perturbaciones en el potencial del tipo que vimos en el ejercicio.

Sin embargo, en 1859 Le Verrier se da cuenta analizando datos que van de 1697 a 1848 que la órbita de Mercurio se sigue desviando de los valores dados por la perturbación. En particular, observó que la órbita se desvía 574" por siglo, y que solo 531" de esa desviación se podían explicar mediante perturbaciones de otros planetas.

Faltaron algo así como 56 años y una nueva teoría de la gravedad para finalmente explicar esos 43" extras.