Guía 4

Tomas Ferreira Chase

1 Ejercicio 7

Tenemos el siguiente sistema que queremos resolver con el formalismo de pequeñas oscilaciones:

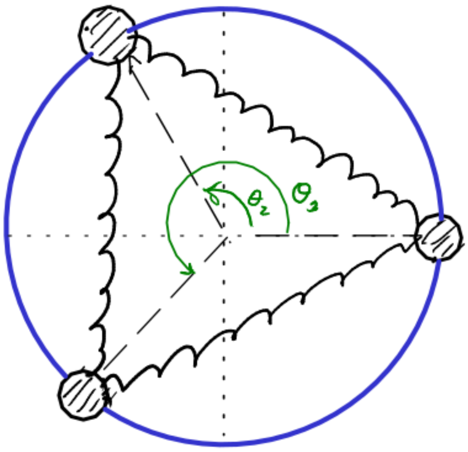

Figure 1: *Las 3 masas y resortes son iguales, con valores m y k respectivamente, y el aro tiene radio a.*

Vamos a plantear el Lagrangiano del sistema. Para dar la posición de cada masita basta con dar el ángulo que las mismas forman con respecto a algun eje. Las coordenadas generalizadas que vamos a utilizar son $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. Luego, la energía cinética del sistema esta dada por

$$T = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \tag{1}$$

Para la energía potencial, primero tenemos que ver como escribir el estiramiento de los resortes.

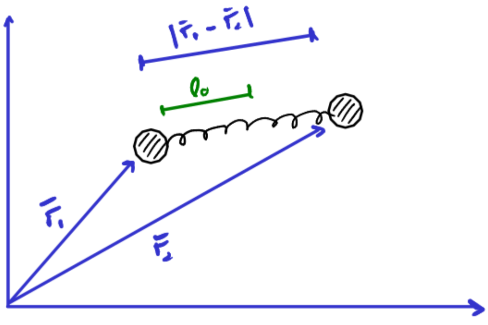

Figure 2

Luego, la energía potencial va a estar dada por

$$U = \frac{k}{2}\left[(|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| - l_0)^2 + (|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l_0)^2 + (|\vec{r}_3 - \vec{r}_2| - l_0)^2\right] \tag{2}$$

Vamos a analizar uno de los términos recordando que $\vec{r}_i = a(\cos\theta_i\,\hat{x} + \sin\theta_i\,\hat{y})$

$$\begin{aligned}
(|\vec{r}_i - \vec{r}_j| - l_0)^2 &= \left(\sqrt{(a\cos\theta_i - a\cos\theta_j)^2 + (a\sin\theta_i - a\sin\theta_3)^2} - l_0\right)^2 &(3)\\
&= \left(\sqrt{(2a^2 - 2a^2(\cos\theta_i\cos\theta_j + \sin\theta_i\sin\theta_j)^2} - l_0\right)^2 &(4)\\
&= \left(2a\sqrt{\frac{1-\cos(\theta_i - \theta_j)}{2}} - l_0\right)^2 &(5)\\
&= \left(2a\sin\frac{\theta_i - \theta_j}{2} - l_0\right)^2 &(6)
\end{aligned}$$

donde usamos la propiedad

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \longrightarrow \sin x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \tag{7}$$

Luego, el potencial lo podemos escribir como

$$U = \frac{k}{2}\left[\left(2a\sin\frac{\theta_3 - \theta_1}{2} - l_0\right)^2 + \left(2a\sin\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - l_0\right)^2 + \left(2a\sin\frac{\theta_3 - \theta_2}{2} - l_0\right)^2\right] \tag{8}$$

1.1 Posiciones de equilibrio

Busquemos las posiciones de equilibrio. Es decir, los puntos en el espacio $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ donde el gradiente del potencial se anula.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial\theta_1} &= -ka\left[\left(2a\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2} + \left(2a\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right] = 0 &(9)\\
\frac{\partial U}{\partial\theta_2} &= ka\left[\left(2a\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2} - \left(2a\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right] = 0 &(10)\\
\frac{\partial U}{\partial\theta_3} &= ka\left[\left(2a\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2} + \left(2a\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right] = 0 &(11)
\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones en principio parece difícil de resolver, así que vamos a utilizar algunos argumentos de simetría para simplificar el problema. Notemos que el sistema es invariante ante rotaciones rígidas de las 3 masitas sobre el aro. Esto quiere decir que le podemos sumar la misma fase a todas las posiciones, y el problema va a ser el mismo (también se puede ver explcítitamente en el Lagrangiano). Luego, no importa cuales sean las posiciones de equilibrio, siempre vamos a poder sumar una fase tal que una de ellas sea $\theta_i = 0$. Vamos a explotar esta libertad y definir $\theta_1 = 0$. Luego, el sistema se simplifica a

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = -ka\left[\left(2a\sin\frac{\theta_3}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3}{2} + \left(2a\sin\frac{\theta_2}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_2}{2}\right] = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = ka\left[\left(2a\sin\frac{\theta_2}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_2}{2} - \left(2a\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right] = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_3} = ka\left[\left(2a\sin\frac{\theta_3}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3}{2} + \left(2a\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right] = 0 \tag{14}$$

Ahora podemos seguir resolviendo el sistema *a la fuerza*, o podemos seguir con consideraciones de simetría. Es razonable pensar que la configuración de equilibrio es aquella en la cual las masitas forman un triángulo equilátero sobre el aro $\{\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{2\pi}{3}, \theta_3 = \frac{4\pi}{3}\}$ (prueben reemplazando estos valores en el gradiente y vean que se anula).

Probemos la siguiente configuración: $\theta_1 = \theta_2 = 0$, y veamos si es consistente con alguna posicion para θ_3

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = -ka\left[\left(2a\sin\frac{\theta_3}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3}{2} - l_0\right] = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = -ka\left[l_0 + \left(2a\sin\frac{\theta_3}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3}{2}\right] = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_3} = ka\left[\left(2a\sin\frac{\theta_3}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3}{2} + \left(2a\sin\frac{\theta_3}{2} - l_0\right)\cos\frac{\theta_3}{2}\right] = 0 \tag{17}$$

Vemos que existen otras configuraciones de equilibrio si $l_0 = 0$, dadas por $\theta_3 = \pi$ o $\theta_3 = 0$.

1.2 Estabilidad de los equilibrios

Recordemos que una posición es de **equilibrio estable** si el potencial tiene un mínimo en esa posición, y es de **equilibrio intestable** si tiene un máximo en la misma. Para ver esto en un potencial que depende de $n \neq 1$ variables, tenemos que ver como está definida la matriz Hessiana del potencial.

Si la matriz Hessiana es definida positiva en $\vec{\theta}_0$ entonces $\vec{\theta}_0$ es un equilibrio estable, y si es definida negativa en $\vec{\theta}_0$ entonces es un equilibrio inestable.

Hay varias formas de ver la definición de una matriz M, acá vamos a ver los autovalores de la misma: si todos los autovalores son mayores a 0, entonces M es definida positiva. Si todos los autovalores son menores a 0, entonces M es definida negativa.

Vamos a notar al Hessiano de U como D^2V.

Estudiemos la posición de equilibrio $\theta_0 = (0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$

$$D^2U\Big|_{\theta_0=(0,0,\pi)} = \begin{pmatrix} ak(a - \frac{\sqrt{3}}{2}l_0) & ak(\frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}l_0) & ak(\frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}l_0) \\ ak(\frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}l_0) & ak(a - \frac{\sqrt{3}}{2}l_0) & ak(\frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}l_0) \\ ak(\frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}l_0) & ak(\frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}l_0) & -ak(a - \frac{\sqrt{3}}{2}l_0) \end{pmatrix} \tag{18}$$

Para simplificar la notación, vamos a definir a $\gamma = \frac{a^2k}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2a}l_0 - 1)$. Luego,

$$D^2U\Big|_{\theta_0=(0,0,\pi)} = \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Si vemos la matriz diagonalizada, tenemos que

$$P^\dagger(D^2U\Big|_{\theta_0=(0,0,\pi)})P = \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Luego, vemos que esta posición es de equilibrio estable si $\gamma > 0$. Es decir, si

$$l_0 > \frac{2}{\sqrt{3}}a \tag{21}$$

1.3 Formalismo de pequeñas oscilaciones

Vamos a utilizar el formalismo de pequeñas oscilaciones en la configuración $\theta_0 = (0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$.

Recordemos que en este formalismo trabajamos con las matrices

$$[\mathbf{K}]_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{\vec{q}=\vec{q}_0} \tag{22}$$

donde la matriz $\mathbf{K}$ es el Hessiano de U que calculamos en la sección anterior!

Por otro lado, de la Ec. 1 tenemos que

$$\mathbf{M} = ma^2 \cdot \mathbb{I}_{3x3} \tag{23}$$

Recordemos que las frecuencias propias del sistema se calculan como

$$|w^2 \cdot \mathbf{M} - \mathbf{K}| = 0 \tag{24}$$

Luego,

$$\begin{vmatrix} w^2ma^2 - 2\gamma & \gamma & \gamma \\ \gamma & w^2ma^2 - 2\gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma & w^2ma^2 - 2\gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

$$(w^2ma^2 - 2\gamma)^3 + 2\gamma^3 - 3\gamma^2(w^2ma^2 - 2\gamma) = 0 \tag{26}$$

$$a^6m^3(w^2)^3 - 6a^4\gamma m^2(w^2)^2 + 9a^2\gamma^2 m(w)^2 = 0 \tag{27}$$

Luego, las soluciones son

$$\begin{cases} w_1^2 = 0 \\ w_{2,3}^2 = \frac{3\gamma}{a^2m} = \frac{3}{2}\frac{k}{m}(\frac{\sqrt{3}}{2a}l_0 - 1) \end{cases} \tag{28}$$

Con autovalores

$$\vec{A}_1 = A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{A}_2 = A_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{A}_3 = A_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

El autovector $\vec{A}_1$ corresponde al modo de frecuencia $w = 0$: las tres masas giran rígidamente sin estirar ni contraer los resortes.

Los modos $\vec{A}_2$ y $\vec{A}_3$ corresponden a modos en los que una de las masas está quieta, y las otras dos oscilan en contrafase alrededor del equilibrio. La degeneración se produce ya que las masas son iguales, por lo que la dinámica va a ser la misma aunque se permuten las masas.

Notemos que el modo en que la masa de θ_3 está quieta y las otras dos se mueven en contrafase es una combinación lineal de $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$.

Juntando estos resultados, el vector de los ángulos de las masitas va a ser

$$\vec{\eta}(t) = \vec{A}_1 \cdot (C_1 + C_1' t) + (\vec{A}_2 \cdot C_2 + \vec{A}_3 \cdot C_3) e^{i w_2 t} \tag{30}$$

El primer término de $\vec{\eta}(t)$ es el modo de $w = 0$, y se lo puede pensar como la solución a la ecuación de movimiento $\ddot{\vec{\eta}}(t) = 0$.

Por último, calculemos las coordenadas normales de oscilación.

$$\vec{\xi}(t) = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \vec{\eta(t)} \tag{31}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot ma^2 \cdot \mathbb{I}_{3x3} \cdot \vec{\eta}(t) \tag{32}$$

$$= ma^2 \begin{pmatrix} \eta_1(t) + \eta_2(t) + \eta_3(t) \\ \eta_3(t) - \eta_2(t) \\ \eta_3(t) - \eta_1(t) \end{pmatrix} \tag{33}$$

por lo que

$$\vec{\xi}(t) = ma^2 \begin{pmatrix} 3(C_1 + C_1' t) \\ 2C_2 e^{iwt} \\ 2C_3 e^{iwt} \end{pmatrix} \tag{34}$$