Giroscopo

Tomas Ferreira Chase

1 Guia 5 - Ejercicio 17

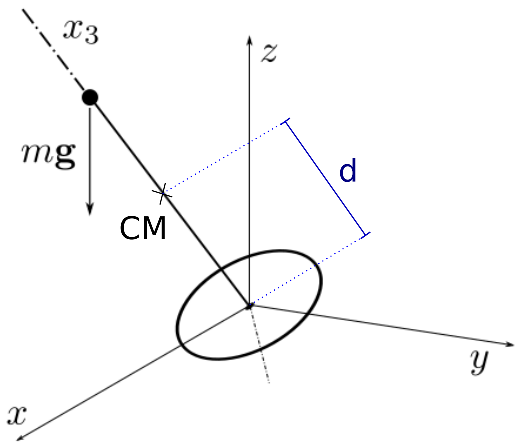

Figure 1: *Modelo de giroscopo.*

Para resolver este ejercicio vamos a suponer que

- El tensor de inercia desde el origen está dado por $\mathbf{I} = diag(I, I, I_3)$.
- El centro de masa del cuerpo se encuentra a una distancia d entre la masa m y el disco.

1.1 Lagrangiano

Empecemos escribiendo la energía cinética del cuerpo. Para esto, vamos a utilizar la fórmula

$$T = \frac{1}{2} M\, \vec{v}_0^2 + m(\vec{r}_{cm} - \vec{r}_0) \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}) + \frac{1}{2}\, \vec{\Omega}^t\, \mathbf{I}^0\, \vec{\Omega} \tag{1}$$

Si elegimos al punto $\vec{r}_0$ como el origen, tenemos que $\vec{v}_0 = 0$, por lo que la energía cinética del cuerpo va a ser sólo de rotación.

Los ángulos de Euler en este problema describen al cuerpo de la siguiente forma

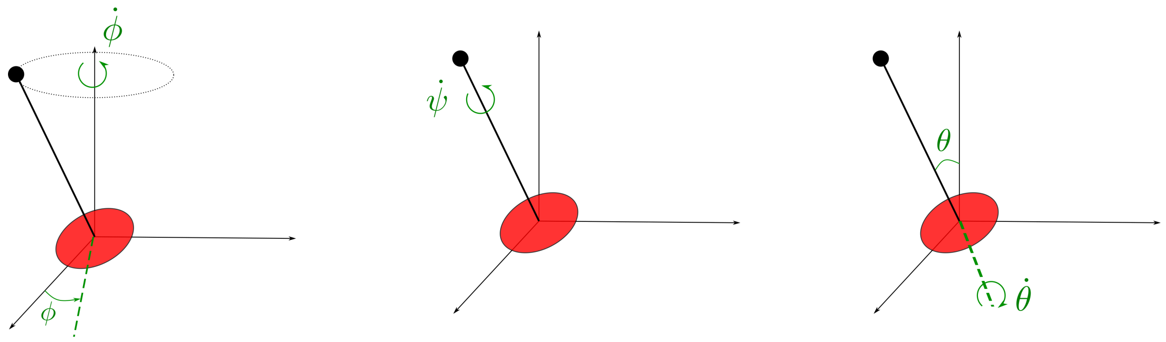

Figure 2: *Rotaciones en los 3 angulos de Euler.*

Notemos que como el tensor de inercia es diagonal en el sistema elegido, tenemos que

$$T = \frac{1}{2} I (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \Omega_3^2 \tag{2}$$

Luego, usando que

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}\sin(\theta)\sin(\psi) + \dot{\theta}\cos(\psi) \\ \dot{\phi}\sin(\theta)\cos(\psi) - \dot{\theta}\sin(\psi) \\ \dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Tenemos que

$$T = \frac{1}{2} I\,(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_3\,(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi})^2 \tag{4}$$

Por otro lado, la energía potencial del cuerpo está dada por la acción de la gravedad sobre el centro de masa, por lo que

$$U = mgd\cos(\theta) \tag{5}$$

Finalmente, el lagrangiano está dado por

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} I\,(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_3\,(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi})^2 - mgd\cos(\theta)} \tag{6}$$

1.2 Cantidades conservadas

Notemos que ψ y ϕ son coordenadas cíclicas, y que el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. Vamos a calcular las cantidades conservadas asociadas a estas simetrías.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = P_\psi \longrightarrow \boxed{P_\psi = I_3\,(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta))} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = P_\phi \longrightarrow \boxed{P_\phi = I_3\,(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta))\cos(\theta) + I\,\dot{\phi}\sin^2(\theta)} \tag{8}$$

Además, podemos combinar las dos cantidades anteriores y obtener

$$\boxed{P_\phi = P_\psi \cos(\theta) + I\dot{\phi}\sin^2(\theta)} \tag{9}$$

Por otro lado, como el Lagrangiano no depende del tiempo sabemos que se conserva la función $h = \sum \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$.

Haciendo las cuentas llegamos a que

$$\boxed{h = \frac{1}{2} I\,(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_3\,(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi})^2 + mgd\cos(\theta)} \tag{10}$$

donde vemos que efectivamente esta cantidad coincide con la energía del cuerpo $E = T + U$.

1.3 Potencial efectivo

Podemos usar las cantidades conservadas para escribir a la energía del cuerpo en función de solo una variable (y su respectiva variable conjugada). Para esto, despejamos

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi - P_\psi \cos(\theta)}{I\,\sin^2(\theta)} \tag{11}$$

Ahora utilicemos las condiciones iniciales para escribir explícitamente P_ϕ y P_ψ. Tenemos que $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ y $\dot{\theta}(0) = \dot{\phi}(0) = \phi(0) = 0$, por lo que

$$P_\psi = \dot{\psi}\, I_3 \longrightarrow w \equiv \dot{\psi} = cte \tag{12}$$

$$P_\phi = 0 \tag{13}$$

Además, $\dot{\phi}$ resulta

$$\dot{\phi} = -w \frac{I_3}{I} \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} \tag{14}$$

Luego,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} w^2 I_3 + mgd\cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2} I\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{w^2 I_3^2}{I} \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + mgd\,\cos(\theta) + \frac{1}{2} w^2 I_3 \end{aligned}$$

El potencial efectivo resulta entonces

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \frac{w^2 I_3^2}{I} \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + mgd\,\cos(\theta) + \frac{1}{2} w^2 I_3 \tag{15}$$

1.4 Linealizacion

Vamos a linealizar el problema para $\theta = \frac{\pi}{2} + \eta$, con $|\eta| \ll 1$ y para $|\dot{\phi}|, |\dot{\theta}| \ll 1$.

Usando que

$$\begin{cases} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}+\eta)}{\sin^2(\frac{\pi}{2}+\eta)} \sim \eta^2 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\eta) \sim \eta \end{cases} \tag{16}$$

tenemos que

$$C = \frac{1}{2} I^2 \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} w^2 I_3^2 \eta^2 - mgdI\,\eta \tag{17}$$

donde C es una constante que ya no es relevante para el problema. Completando cuadrados en la ecuación anterior tenemos que

$$\tilde{C} = \frac{1}{2} I^2 \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} \left(wI_3\,\eta - \frac{mgdI}{wI_3} \right)^2 \tag{18}$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior vamos a definir a $\mu = wI_3\,\eta - \frac{mgdI}{2wI_3}$, por lo que tenemos

$$\dot{u}^2 + w^2 \frac{I_3^2}{I^2} u^2 = \tilde{\tilde{C}} \tag{19}$$

La ecuacion anterior es la energia de un oscilador armonico, por lo que las soluciones van a ser de la pinta

$$u(t) = A \cos(\Omega t + \gamma) \quad , \qquad \Omega = \frac{wI_3}{I} \tag{20}$$

o volviendo a la variable de la perturbación,

$$\eta(t) = \tilde{A} \cos(\Omega t + \gamma) + \frac{mgdI}{w^2 I_3^2} \tag{21}$$

Imponiendo las condiciones iniciales, tenemos que

$$\dot{\eta}(0) = 0 = -\tilde{A}\,\Omega \sin(\gamma) \longrightarrow \gamma = 0 \tag{22}$$

$$\eta(0) = 0 = A + \frac{mgdI}{w^2 I_3^2} \longrightarrow A = -\frac{mgdI}{w^2 I_3^2} \tag{23}$$

Luego, la perturbación resulta

$$\boxed{\eta(t) = \frac{mgdI}{w^2 I_3^2} \left[1 - \cos\left(\frac{wI_3}{I} t \right) \right]} \tag{24}$$

Notemos que cuanto más grande el w, más chica es la perturbación.

1.5 Ecuaciones de Euler

Podemos llegar a las ecuaciones de movimiento directamente de las ecuaciones de Euler, aunque la dinámica del problema queda más oculta. Para esto, primero calculemos el torque de la fuerza de la gravedad

$$\vec{\mathcal{T}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_g = d(\cos\phi \sin\theta\,\hat{x} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}) \times g\,(-\hat{z}) \tag{25}$$

$$= gd(-\sin\phi\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y}) \tag{26}$$

Notemos que no hay torque en la dirección $\hat{z}$, por lo que el momento angular en esa dirección se conserva. De hecho, esto ya lo habíamos visto cuando calculamos las cantidades conservadas, no es otra cosa que P_ψ.

Ahora podemos escribir a las ecuaciones de Euler como

$$I\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I)\Omega_2\Omega_3 = -g\sin\phi\sin\theta \tag{27}$$

$$I\dot{\Omega}_2 + (I_3 - I)\Omega_1\Omega_3 = -g\cos\phi\sin\theta \tag{28}$$

$$\dot{\Omega}_3 = 0 \longrightarrow \Omega_3 = P_\psi = cte \tag{29}$$