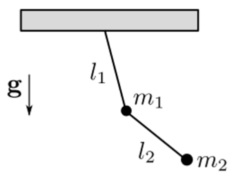
Guía 1 - Ejercicio 10

Péndulo Doble

Enunciado

10. Considere el péndulo plano doble de la figura.



(a) Encuentre las ecuaciones de movimiento.

(b) Halle una expresión aproximada de las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.

(c) Para el caso $m_1 = m_2 = m$ y $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, resuelva las ecuaciones proponiendo una solución de tipo armónico para los grados de libertad. En $t = 0$ ambas masas se hallan sobre la vertical y a la inferior se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.

(d) Para las condiciones iniciales del item anterior, halle las tensiones sobre los hilos.

Resolución

Lo primero que tenemos que hacer es encontrar un conjunto de coordenadas generalizadas que describan apropiadamente al sistema. Asumimos que el sistema se encuentra confinado a moverse en un plano, por lo que cada partícula aporta 2 grados de libertad ($2N$). Sin embargo, este no es el número total de grados de libertad ya que queda restar los vínculos. En este caso, el número de vínculos holónomos (m) son 2 y los escribimos a continuación

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_1| &= l_1 \\ |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| &= l_2 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\mathbf{x}_1$ representa la posición de la partícula 1, y $\mathbf{x}_2$ la de la partícula 2, desde el sistema de referencia de la figura 3. Por lo tanto, nos bastan 2 coordenadas generalizadas ($2N - m = 2 \cdot 2 - 2 = 2$) para describir el sistema. Existen muchas opciones posibles, una de ellas es tomar el ángulo de cada masa con respecto a la vertical, como se muestra en la figura

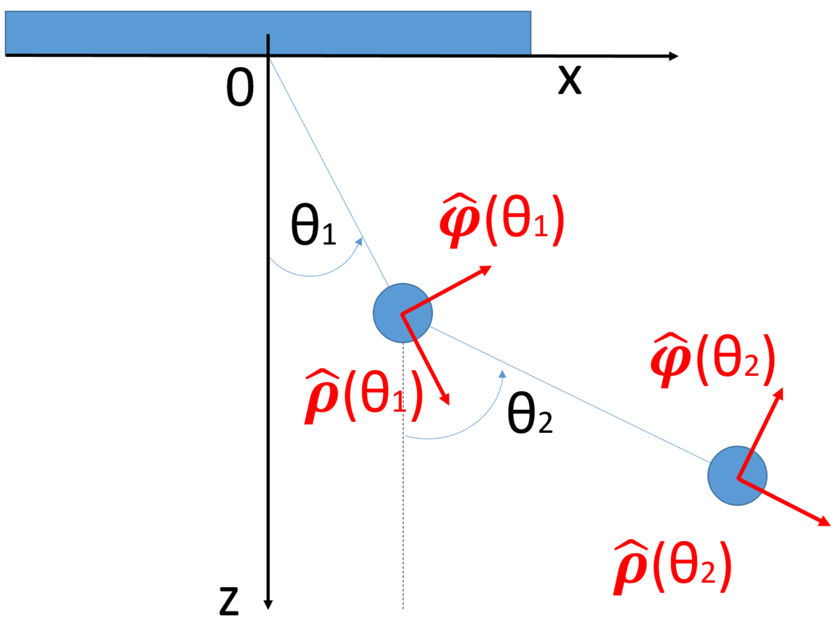


Figura 1

Lo siguiente que vamos a hacer es escribir las posiciones de estas masas en función de las coordenadas generalizadas $\{\theta_1;\theta_2\}$ para poder expresar su energía cinética y potencial. Para ello, va a ser útil recordar las siguientes identidades (es un buen ejercicio tratar de probarlas al menos una vez por ustedes mismos)

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\hat{\rho}(\alpha) = \hat{\phi}(\alpha) \\
\hat{\phi}(\alpha)\cdot\hat{\phi}(\beta) = cos(\alpha-\beta)
\end{gathered} \tag{2}
$$

Usando esto, tenemos que las posiciones y por lo tanto, sus derivadas, son

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{x}_1 = l_1\hat{\rho}(\theta_1) & \frac{d}{dt}\rightarrow & \dot{\mathbf{x}}_1 = l_1\dot{\theta}_1\hat{\phi}(\theta_1) \\
\mathbf{x}_2 = l_1\hat{\rho}(\theta_1) + l_2\hat{\rho}(\theta_2) & \frac{d}{dt}\rightarrow & \dot{\mathbf{x}}_2 = l_1\dot{\theta}_1\hat{\phi}(\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2\hat{\phi}(\theta_2)
\end{array} \tag{3}
$$

Calculamos los cuadrados de las velocidades

$$
\begin{aligned}
&|\dot{\mathbf{x}}_1|^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 \\
&|\dot{\mathbf{x}}_2|^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\hat{\phi}(\theta_1)\hat{\phi}(\theta_2) = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 cos(\theta_1-\theta_2)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Con esta información ya podemos escribir la energía cinética. Vamos ahora con el potencial gravitatorio. Hay que tener cuidado con el signo dado que las posiciones dadas en la ecuación 3 utilizan ángulos con respecto al eje z, cuya orientación es la misma que la de la gravedad. Esto quiere decir que, tomando como origen el que se dio en la figura 3, el potencial se expresa como

$$V = -m_1 g l_1 cos\theta_1 - m_2 g(l_1 cos\theta_1 + l_2 cos\theta_2) \tag{5}$$

Por lo tanto, el Lagrangiano del sistema

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + m_1 g l_1 cos\theta_1 + m_2 g(l_1 cos\theta_1 + l_2 cos\theta_2) \tag{6}$$

El inciso (a) nos pide hallar las ecuaciones de movimiento. Para ello, aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange a cada coordenada. Recordamos las ecuaciones de lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \tag{7}$$

Hay que arremangarse y ponerse a derivar, teniendo cuidado al aplicar la regla de la cadena. Para θ_1 tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_1 - \theta_2) - m_1 g l_1 sen\theta_1 - m_2 g l_1 sen\theta_1 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2) l_1 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2)\right] \\ &= (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) sen(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

Obtuvimos entonces la ecuación de movimient para θ_1

$$\begin{aligned} \boxed{(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2)} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 sen(\theta_1 - \theta_2) \\ + \cancel{m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_1 - \theta_2)} - \cancel{m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_1 - \theta_2)} &- (m_1 + m_2) g l_1 sen\theta_1 \\ &\boxed{= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 sen(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 sen\theta_1} \end{aligned} \tag{9}$$

Para θ_2 tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 sen\theta_2 \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 \frac{d}{dt}\left[l_2^2 \dot{\theta}_2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$
$$= m_2 \left[l_2^2 \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) sen(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Y por lo tanto, la ecuación para θ_2

$$\begin{aligned} \boxed{m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2)} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 sen(\theta_1 - \theta_2) \\ \cancel{-m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_1 - \theta_2)} + \cancel{m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_1 - \theta_2)} &- m_2 g l_2 sen\theta_2 \\ &\boxed{= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 sen(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 sen\theta_2} \end{aligned} \tag{11}$$

Con esto terminamos el inciso (a). El inciso (b) nos pide hallar una aproximación a las ecuaciones de movimiento en torno al equilibrio estable. Lo que primero habría que buscar es cuál es ese punto de equilibrio. En este caso, se puede ver de forma intuitiva que el equilibrio estará en torno a $\theta_1^{eq} = \theta_2^{eq} = 0$. Utilizamos entonces para aproximar las ecuaciones de movimiento que $\theta_1 \sim 0$, $\theta_2 \sim 0$, $\dot{\theta}_1 \sim 0$, $\dot{\theta}_2 \sim 0$. A priori, no es cierto que si se aproxima una función por valores cercanos a cero, entonces su derivada también estará cerca del cero. Sin embargo, en este caso contamos con que la energía se conserva. Utilizar ángulos pequeños implica que el nivel de energía será bajo, y por lo tanto, la energía cinética también será de orden bajo.

Realizamos las siguientes aproximaciones a primer orden:

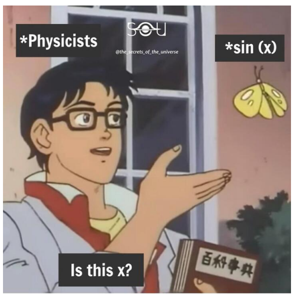


Figura 2

$$\begin{aligned} sen(\theta) &\sim \theta & cos(\theta) &\sim 1 \\ sen(\theta_1 - \theta_2) &\sim \theta_1 - \theta_2 & cos(\theta_1 - \theta_2) &\sim 1 \end{aligned} \tag{12}$$

Y tirando todos los términos de orden mayor a $\mathcal{O}(\theta)$, es decir, θ^2, $\theta\dot{\theta}$, $\dot{\theta}^2$ o mayores, obtenemos las siguientes aproximaciones a las ecuaciones de movimiento

$$\begin{gathered}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 = -(m_1+m_2)gl_1\theta_1 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 = -m_2 g l_2 \theta_2\end{gathered} \tag{13}$$

Ahora, nos piden resolver estas ecuaciones. Conviene reescribirlas de forma matricial

$$\begin{pmatrix}(m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix} + g\begin{pmatrix}(m_1+m_2)l_1 & 0 \\ 0 & m_2 l_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix} = 0 \tag{14}$$

Como indica el enunciado, resolvemos proponiendo una solución periódica

$$\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix} = e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix} \tag{15}$$

Si miramos con atención, este problema es una generalización del problema clásico que ya sabemos resolver de autovalores. Sean las matrices A y B y el autovalor λ, si A es inversible

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} \to \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{16}$$

En un problema de este tipo, lo que queremos es encontrar el conjunto de soluciones no triviales (es decir, aquellas soluciones que no impliquen $\mathbf{x} = 0$). Para ello, buscamos los autovalors pidiendo que el siguiente determinante se anule

$$(\lambda\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{x} = 0 \to det(\lambda\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0 \tag{17}$$

En nuestro caso, buscamos las frecuencias calculando el siguiente determinante ($\lambda = \omega^2$)

$$det\left[\omega^2\begin{pmatrix}(m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2\\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2\end{pmatrix} - g\begin{pmatrix}(m_1+m_2)l_1 & 0\\ 0 & m_2l_2\end{pmatrix}\right] = 0 \tag{18}$$

Para simplificar las cuentas, usamos las relaciones que se indican en el enunciado $m_1 = m_2 \equiv m$ y $l_1 = l_2 \equiv l$.

$$det\left[\begin{pmatrix}2ml^2\omega^2 - 2gml & ml^2\omega^2\\ ml^2\omega^2 & ml^2\omega^2 - gml\end{pmatrix}\right] = 0 \leftrightarrow \omega^4 l^2 - 4gl\omega^2 + 2g^2 = 0 \tag{19}$$

Obtenemos entonces dos frecuencias características, correspondientes a los modos de oscilación

$$\omega_\pm^2 = (2 \pm \sqrt{2})g/l \tag{20}$$

Si estas son las frecuencias de los modos normales de oscilación... ¿cáles son los modos? Estos son los autovectores del problema. Los buscamos resolviendo

$$\begin{pmatrix}2ml^2\omega_\pm^2 - 2gml & ml^2\omega_\pm^2\\ ml^2\omega_\pm^2 & ml^2\omega_\pm^2 - gml\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_\pm\\ B_\pm\end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

Resolviendo se llega al siguiente resultado

$$\begin{pmatrix}A_\pm\\ B_\pm\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \mp\sqrt{2}\end{pmatrix} \tag{22}$$

La solución más general va a ser una combinación lineal de los dos modos hallados:

$$\begin{pmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{pmatrix} = C_+\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}cos(\omega_+ t + \phi_+) + C_-\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}cos(\omega_- t + \phi_-) \tag{23}$$

Donde $C_{\pm}$ y $\phi_{\pm}$ se obtienen mediante las condiciones iniciales. Les dejo como ejercicio encontrar la solución final para las condiciones iniciales que pide el problema (deberían obtener que las fases son $\phi_{\pm} = -\pi/2$ y que $-(\sqrt{2}+1)C_{+} = C_{-}$).

Por último, el inciso (d) nos pide hallar las tensiones. Para ello, planteamos la ecuación de Newton para la masa 1

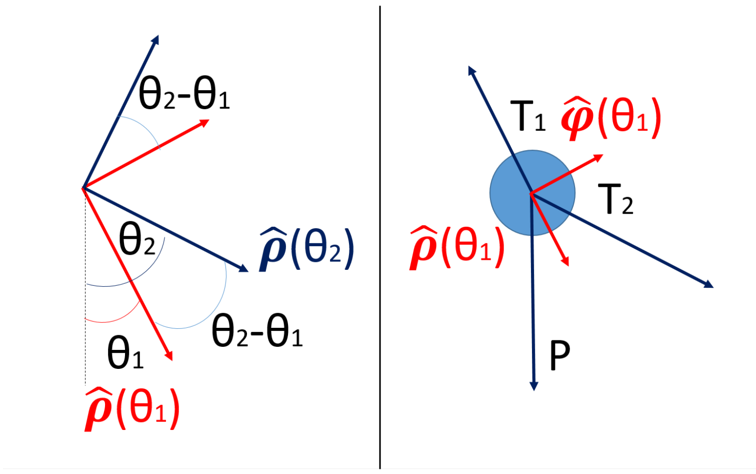


Figura 3

$$m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1$$

$$\mathrm{m}_1 l_1\ddot{\theta}_1\hat{\phi}(\theta_1) - m_1 l_1\dot{\theta}_1^2\hat{\rho}(\theta_1) = T_2\hat{\rho}(\theta_2) - T_1\hat{\rho}(\theta_1) + \underbrace{\boxed{m_1 g cos(\theta_1)\hat{\rho}(\theta_1) - m_1 g sen(\theta_1)\hat{\phi}(\theta_1)}}_{\text{Peso proyectado en } \hat{\rho}(\theta_1) \text{ y } \hat{\phi}(\theta_1)} \tag{24}$$

donde T_1 es la tensión de la soga l_1 y T_2 la de l_2. Reescribimos al versor $\hat{\rho}(\theta_2)$ en función de $\hat{\rho}(\theta_1)$ y $\hat{\phi}(\theta_1)$:

$$\hat{\rho}(\theta_2) = cos(\theta_2 - \theta_1)\hat{\rho}(\theta_1) + sen(\theta_2 - \theta_1)\hat{\phi}(\theta_1) \tag{25}$$

Combinando las ecuaciones 24 y 25 llegamos a dos ecuaciones (una para $\hat{\rho}(\theta_1)$ y otra para $\hat{\phi}(\theta_1)$) con dos incógnitas (T_1 y T_2).

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\theta_1) &: T_1 - T_2 cos(\theta_2 - \theta_1) = m_1 g cos\theta_1 + m_1 l_1\dot{\theta}_1^2 \\ \hat{\phi}(\theta_1) &: T_2 sen(\theta_2 - \theta_1) = m_1 l_1\ddot{\theta}_1 + m_1 g sen(\theta_1) \end{aligned} \tag{26}$$

De acá despejamos a las tensiones en función de las aceleraciones, veocidades y ángulos.