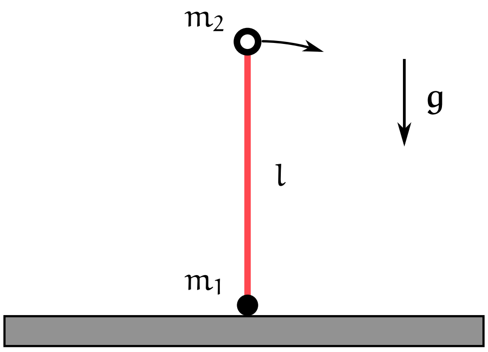
Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021

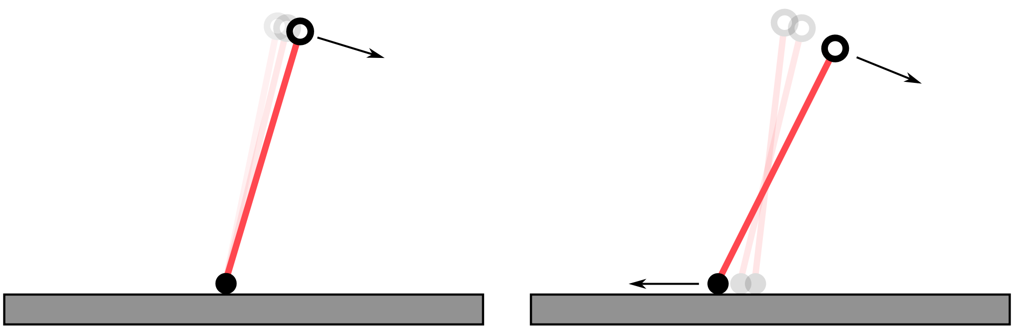
Clase práctica del jueves 25/3

*Guía 0. Leyes de conservación. Problema unidimensional equivalente.**

■ **Problema 7**. Dos masas, m_1 y m_2, de tamaño despreciable, están unidas por una barra rígida de longitud l y masa despreciable. Se coloca la barra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, como muestra la figura, y se la aparta levemente de la vertical. ¿En qué punto de la superficie golpea m_2?



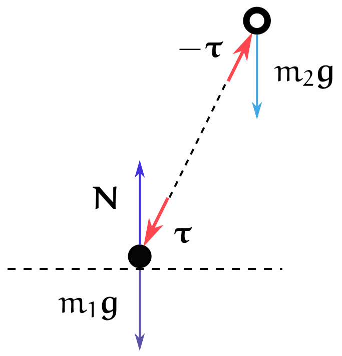
■ **Solución**. Si intentan atacar este problema resolviendo las ecuaciones de movimiento encontrarán muchas complicaciones. La principal dificultad es que pueden pasar dos cosas. Pero primero pensemos en lo que va a ocurrir inicialmente. Estaremos todos de acuerdo en que la barra debe empezar a caer como un lápiz apoyado sobre su punta. La figura de la izquierda muestra esta primera conjetura. También es más o menos evidente que la masa inferior tenderá a resbalar sobre el piso, moviéndose hacia la izquierda. Esto es así porque la tensión en la barra inicialmente no diferirá mucho de la tensión que hay cuando la barra está exactamente en la vertical, tensión que es igual al peso de la segunda masa. Al inclinarse la barra, esa fuerza tenderá a mover la masa inferior hacia la izquierda. La figura de la derecha da entonces una visión más exacta de lo que realmente sucederá al principio.



---

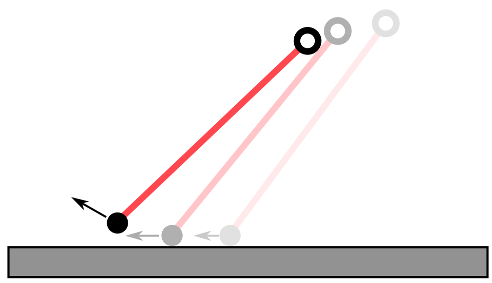
*zanellaj@df.uba.ar

Encaminados a resolver el problema mediante las ecuaciones de Newton, uno empezaría por dibujar los diagramas de cuerpo libre, como muestra la figura.



La fuerza de reacción del piso es $\mathbf{N}$. En tanto que las fuerzas de reacción en los extremos de la barra son, respectivamente, $\boldsymbol{\tau}$ y $-\boldsymbol{\tau}$.

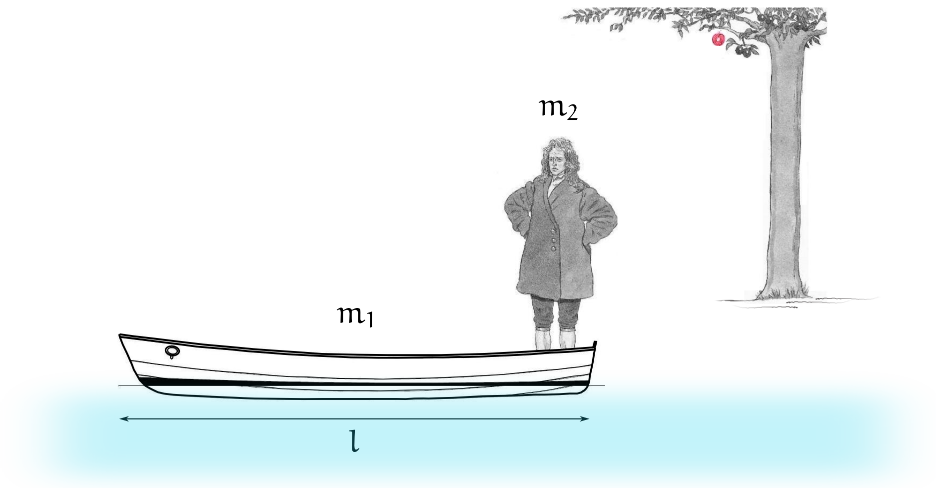
Ahora bien, volviendo a lo que dijimos antes acerca de que pueden suceder dos cosas: la cuestión es que nada asegura que la masa m_1 no pierda contacto con el piso.



Entonces el problema cambia por completo, puesto que desaparece la fuerza normal. El procedimiento para resolver este problema tendría que seguir detalladamente la evolución de la fuerza normal, para ver si se anula en algún momento. Si tal cosa ocurriese, a partir de ese momento habría que empezar a resolver un problema diferente, aunque más simple: la rotación y caída libre de la barra.

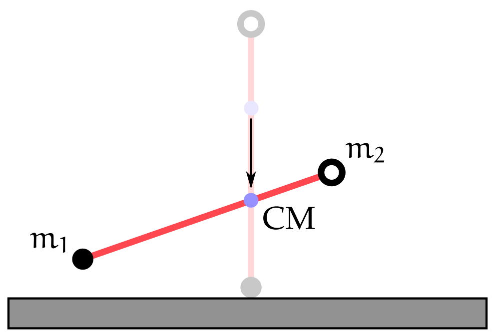
Queda claro que la estrategia de resolver este problema a través de las ecuaciones de movimiento resulta sumamente engorrosa porque, para empezar, esas ecuaciones involucran dos fuerzas desconocidas, la normal y la tensión, la primera de las cuales puede estar presente o no. Y aún en el caso de eliminar estas fuerzas de vínculo y de llegar a las ecuaciones de movimiento propiamente dichas, ¿qué deberíamos hacer luego? ¿Resolverlas?

Resulta que este problema es mucho más sencillo de encarar a través de las leyes de conservación. Todos estarán familiarizados con este otro problema: un hombre de masa m_2 está parado en el extremo de un bote de masa m_1 y largo l. El hombre camina hacia el otro extremo del bote. Asumiendo que el bote se desplaza sin rozamiento sobre la superficie del agua, ¿qué distancia se habrá movido el hombre -respecto de la tierra firme- al llegar al otro extremo del bote?

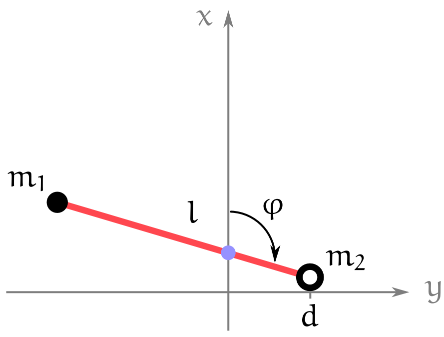


Difícilmente a alguien se le ocurra escribir las ecuaciones de movimiento en este problema. De inmediato nos damos cuenta de que el centro de masa del sistema no puede moverse horizontalmente, porque no hay fuerzas externas en esa dirección. El problema se resuelve de manera muy sencilla planteando esta condición de inmovilidad del centro de masa.

Lo mismo vale para el problema de la barra que cae. No hay fuerzas externas en la dirección horizontal, entonces la velocidad del centro de masa en esa dirección es constante. En particular, dada la condición inicial del problema, la velocidad horizontal del centro de masa es inicialmente cero: el centro de masa siempre estará sobre la línea vertical definida por la posición inicial de la barra. La configuración más general del sistema será como la que muestra la figura.



El centro de masa cae sobre la vertical inicial. Cuando la masa m_2 choque contra el piso tendremos la configuración que muestra la figura siguiente.



Para que el centro de masa esté en $y = 0$ debe cumplirse

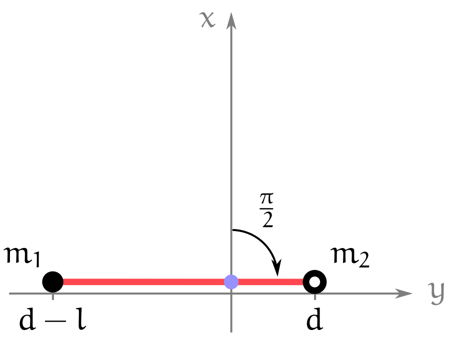
$$(d - l \sin\varphi)m_1 + dm_2 = 0. \tag{1}$$

De aquí resulta

$$d = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, l \sin\varphi. \tag{2}$$

Este es un resultado insatisfactorio, pues depende del ángulo que forme la barra cuando m_2 choque contra el piso, y el conocimiento de ese ángulo es inseparable de los detalles de la dinámica. No hemos respondido aún a la pregunta de si m_1 se despega del piso o no.

Cuando uno resuelve este problema por primera vez, el hecho de encontrarlo en la Guía 0 y de que el enunciado pida una solución sin más vueltas induce a pasar por alto la posibilidad de que la masa m_1 se despegue del piso. Uno rápidamente imagina el momento del choque como muestra la figura:



La condición sobre la posición del centro de masa es directamente

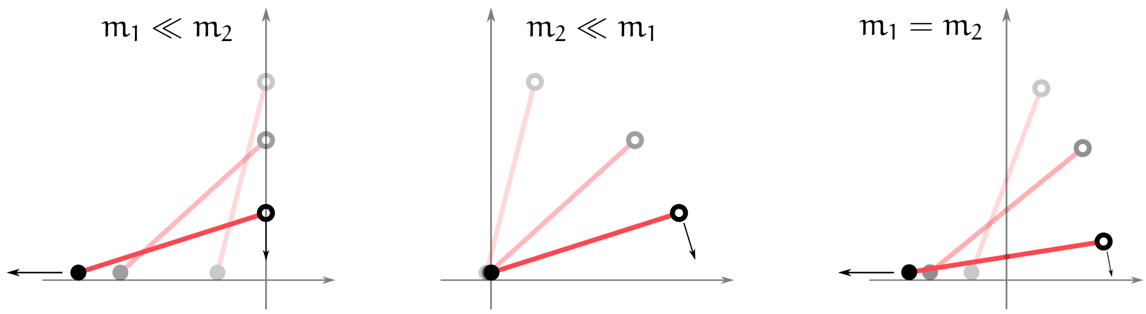
$$(d - l)m_1 + m_2 d = 0, \tag{3}$$

lo que implica

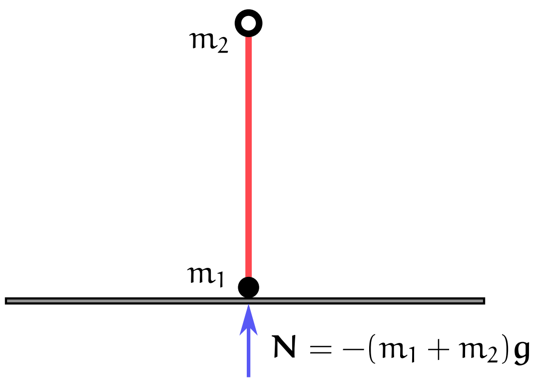
$$d = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, l. \tag{4}$$

Esta sería la solución rápida del problema. Cabe en dos líneas.

Antes de ver si en verdad m_1 no se despega del piso, resulta útil analizar, como siempre, los casos extremos o simétricos. Por ejemplo, si $m_1 = 0$ entonces es como si esta partícula no estuviera; la masa m_2 debe caer en línea recta y por lo tanto debería ser $d = 0$, tal como lo predice la expresión anterior. En el caso opuesto, digamos $m_1 \gg m_2$, es como si la masa m_1 estuviera fija; por lo tanto m_2 debe chocar contra el piso a una distancia l del origen. La expresión anterior en este caso da, en efecto, $d \simeq l$. En el caso simétrico, con $m_1 = m_2$, la barra debería quedar centrada en el origen, y ser entonces $d = l/2$. Vemos que la expresión (4) da en verdad el resultado esperado.



En un segundo encuentro con el problema, surge la preocupación acerca de si m_1 llega a despegarse del piso, en cuyo caso la solución anterior pierde validez. ¿Cómo podemos saber si esto ocurre o no? Una forma sería resolver el problema numéricamente (aunque todavía no hemos visto una forma rápida de obtener sus ecuaciones de movimiento). Con un resultado numérico a la vista, es más sencillo determinar lo que hay que demostrar. En última instancia, la cuestión pasa por saber si la fuerza normal que el piso ejerce sobre m_1 llega a anularse o no. Inicialmente es claro que esa fuerza es igual al peso de las dos masas. Esto es, inicialmente sabemos que la normal es positiva.



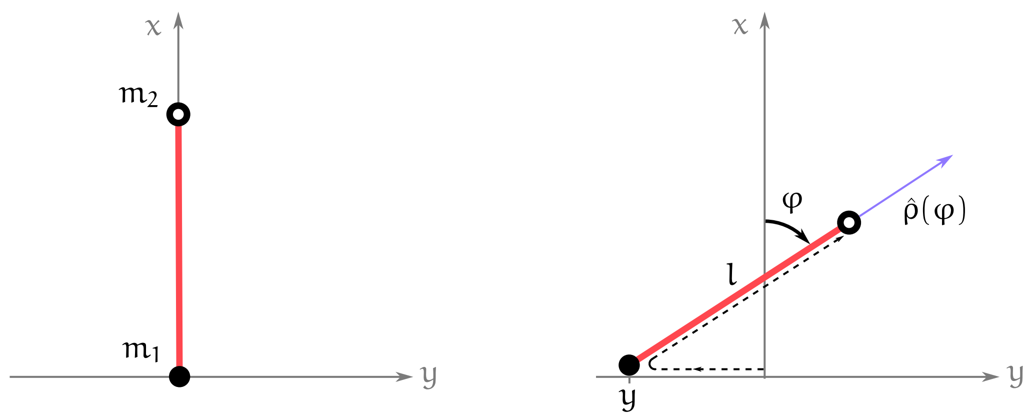
Si al girar la barra en algún momento la normal se anulase, entonces en el movimiento subsiguiente la fuerza normal debería desaparecer de las ecuaciones, hasta que alguna de las masas choque contra la superficie. La estrategia es resolver el problema asumiendo que m_1 no se despega del piso y luego verificar si la normal se anula en algún momento. Si la normal se anula, habría que replantear la solución a partir de ese momento y quedarían pocas posibilidades de llegar a una solución explícita para la distancia d a la que m_2 choca contra el piso.

Fíjense que si uno intentase resolver esta pregunta integrando las ecuaciones de Newton, la cuestión se complica enormemente, porque, en primer lugar, hay fuerzas de vínculo desconocidas y, en segundo lugar, nada nos asegura que podamos integrar explícitamente las ecuaciones de movimiento. En todo caso, obtendríamos las posiciones de las masas como funciones del tiempo, y deberíamos extraer de esas soluciones el valor de la fuerza normal. El sistema de la barra con las dos masas no es tan distinto de un péndulo con el punto de apoyo móvil que, a su vez, no es tan distinto de un péndulo simple. Sabemos que la solución de las ecuaciones de movimiento de un péndulo simple involucra funciones elípticas. De manera que no debemos esperar, en el problema de las dos masas, nada que sea más sencillo que eso. Debemos buscar un camino alternativo.

¿Hasta dónde podremos llegar usando únicamente leyes de conservación? Ya hemos visto una de esas leyes: la componente horizontal de la velocidad del centro de masa es cero. La otra ley de conservación inmediata es la de la energía mecánica. La energía mecánica se conserva porque las fuerzas externas son conservativas o sencillamente no realizan trabajo (en particular, no hay rozamiento). Necesitamos, pues, escribir la energía mecánica. Siguiendo con la estrategia optimista de suponer que m_1 no pierde contacto con el piso, llamando y a su coordenada horizontal, $\mathbf{r}_1 = y\,\hat{y}$, su energía cinética es

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 \dot{y}^2. \tag{5}$$

Para la masa m_2 es necesario primero escribir su posición de una manera que resulte práctica. Un par de coordenadas aptas para describir la posición de m_2 está formado por y y φ, como muestra la figura.



Si queremos indicar a alguien cómo llegar a m_2 desde el origen, debemos decirle: camine primero una distancia y (con su signo) en la dirección del eje y, luego camine una distancia l en la dirección del versor $\hat{\rho}(\varphi)$. Es decir,

$$\mathbf{r}_2 = y\,\hat{y} + l\,\hat{\rho}(\varphi). \tag{6}$$

Para calcular la energía cinética de m_2, primero debemos hallar su velocidad,

$$v_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{y}\,\hat{y} + l\dot{\varphi}\,\frac{d\hat{\rho}(\varphi)}{d\varphi}. \tag{7}$$

Calcularemos la derivada del versor $\hat{\rho}(\varphi)$ por primera y última vez. Este resultado elemental debería estar al nivel de identidades tales como $(\sin x)' = \cos x$. En primer lugar descomponemos $\hat{\rho}(\varphi)$ en sus componentes cartesianas:

$$\hat{\rho}(\varphi) = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}. \tag{8}$$

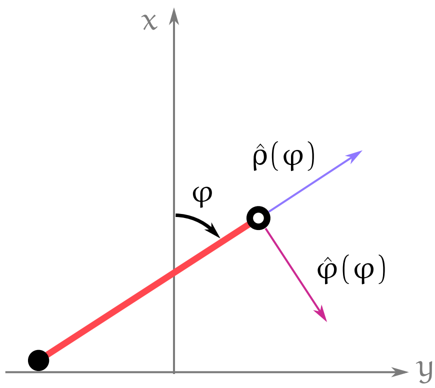
Derivamos respecto de φ,

$$\frac{d\hat{\rho}(\varphi)}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y} \equiv \hat{\varphi}(\varphi). \tag{9}$$

Es decir, la derivada de $\hat{\rho}$ es el otro versor de las coordenadas polares. Asimismo,

$$\frac{d\hat{\varphi}(\varphi)}{d\varphi} = -\cos\varphi\,\hat{x} - \sin\varphi\,\hat{y} = -\hat{\rho}(\varphi). \tag{10}$$

No exagero si digo que el par de ecuaciones (9) y (10) son muy útiles en la práctica, y más aún su generalización a coordenadas esféricas. La figura muestra la relación entre $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$. Notar que estos versores no son propiamente los versores de polares asociados al punto del plano donde se encuentra m_2. Están asociados a la dirección de la barra.



Volviendo a la ec. (7) queda

$$v_2 = \dot{y}\,\hat{y} + l\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}(\varphi). \tag{11}$$

Para calcular su módulo al cuadrado lo más sencillo es usar la fórmula vectorial

$$|(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots)|^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + 2\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \ldots \tag{12}$$

En nuestra expresión para v_2 aparecen únicamente dos términos. Así resulta

$$v_2^2 = \dot{y}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\,\hat{y}\cdot\hat{\varphi}(\varphi). \tag{13}$$

Pero la componente y de $\hat{\varphi}(\varphi)$ es $\cos\varphi$, de modo que

$$v_2^2 = \dot{y}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi. \tag{14}$$

Recordemos que nuestro objetivo era escribir la energía mecánica de las dos partículas. Ya tenemos la energía cinética, que es

$$T = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi. \tag{15}$$

La energía potencial (asumiendo que m_1 permanece sobre el piso) es

$$V = m_2 g l\cos\varphi. \tag{16}$$

Inicialmente $T = 0$ y $V = m_2 g l$. Luego, la ecuación de conservación para la energía mecánica es

$$T + V = m_2 g l. \tag{17}$$

Explícitamente

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2 g l\cos\varphi = m_2 g l. \tag{18}$$

En esta expresión aparecen φ, $\dot{\varphi}$ y $\dot{y}$, pero no aparece y. De manera que si pudiésemos escribir $\dot{y}$ en términos de φ y $\dot{\varphi}$ tendríamos una ecuación de conservación para un problema equivalente descripto únicamente por la coordenada φ.

Volviendo a la ley de conservación para la componente horizontal de la velocidad del centro de masa, lo que sabemos es que

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = 0. \tag{19}$$

Ahora bien,

$$v_{1y} = \dot{y}, \tag{20}$$

y

$$v_{2y} = \dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi. \tag{21}$$

En definitiva,

$$m_1\dot{y} + m_2(\dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi) = 0. \tag{22}$$

Esto nos permite eliminar $\dot{y}$ en términos de $\dot{\varphi}$ y φ, que es lo que buscábamos,

$$\dot{y} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\, l\dot{\varphi}\cos\varphi. \tag{23}$$

La idea es entonces reemplazar esta relación en la expresión (18) para la conservación de la energía mecánica. Deberían llegar al siguiente resultado, o a uno equivalente:

$$\tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2\left(1-\mu\cos^2\varphi\right)-\tfrac{1}{2}\omega^2(1-\cos\varphi)=0, \tag{24}$$

donde definimos

$$\mu=\frac{m_2}{m_1+m_2}, \qquad \omega^2=\frac{2g}{l}. \tag{25}$$

(El factor 2 en la definición de ω^2 es una elección hecha ya con el resultado del problema a la vista, pero perfectamente podría omitirse).

Tenemos que detenernos un momento en la expresión (24). La coordenada y ha sido eliminada del problema. Si conociéramos la evolución de φ, podríamos obtener inmediatamente la evolución de y. La ecuación que gobierna el problema termina teniendo la forma de una ecuación de conservación para un sistema equivalente descripto únicamente por la coordenada φ. En este tipo de situaciones, decimos que hemos encontrado un problema unidimensional equivalente.

La forma de la ley de conservación para este problema equivalente, ec. (24), no tiene a primera vista un aspecto usual. No es del tipo

$$\tfrac{1}{2}M\dot{x}^2+V(x)=E. \tag{26}$$

Pero podemos llevarla a esa forma reescribiéndola como

$$\tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2-\tfrac{1}{2}\omega^2\frac{1-\cos\varphi}{1-\mu\cos^2\varphi}=0. \tag{27}$$

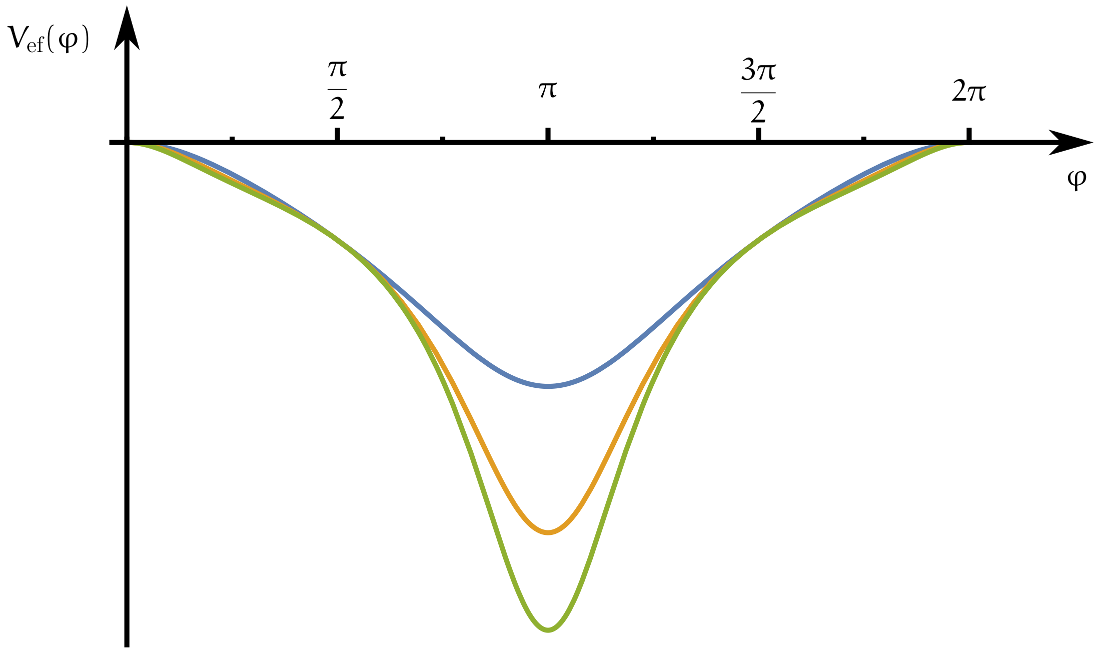
Es un problema efectivo del tipo usual con la particularidad de que lo que hace las veces de E es igual a cero. Tenemos entonces que

$$\tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2+V_{\text{ef}}(\varphi)=0, \tag{28}$$

donde el potencial efectivo está dado por

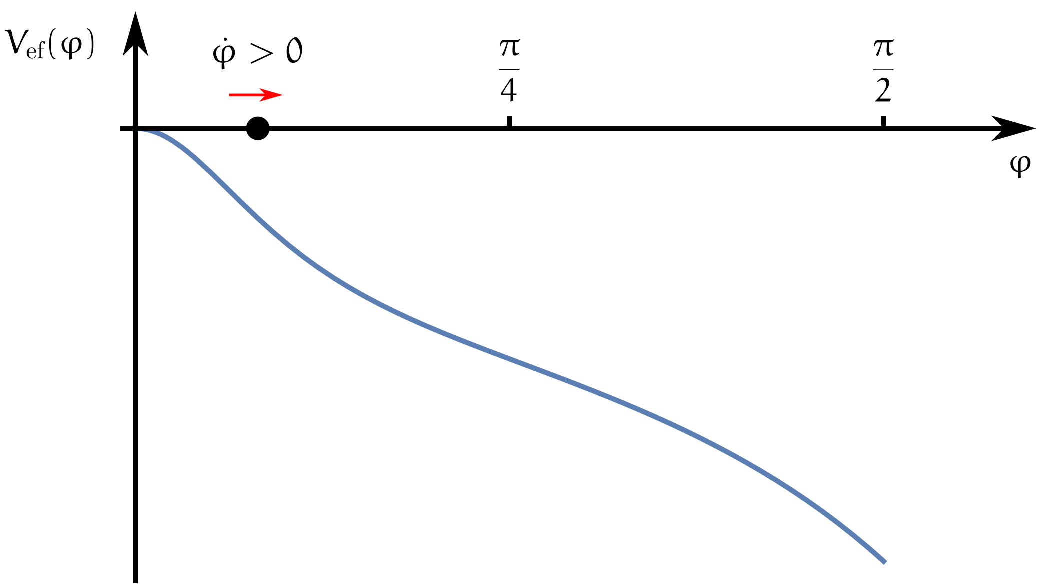
$$V_{\text{ef}}(\varphi)=-\tfrac{1}{2}\omega^2\frac{1-\cos\varphi}{1-\mu\cos^2\varphi}. \tag{29}$$

El factor ω^2 es irrelevante para los detalles del movimiento, y podría ser eliminado mediante una redefinición de la escala temporal. A los fines prácticos este potencial depende de un único parámetro, μ. La figura muestra el potencial para distintos valores de μ.



Cualitativamente, la forma no depende del valor de μ. Las curvas más pronunciadas corresponden a valores de μ más cercanos a 1, es decir, a valores de m_2 grandes comparados con m_1.

En este problema equivalente, la partícula ficticia tiene energía total igual a cero. Además, las condiciones iniciales del problema son tales que $\varphi(0)$ tiende a 0^+. En el instante inicial, la partícula está ubicada ligeramente a la derecha del origen. Es evidente que el movimiento de esta partícula ficticia corresponde a la caída en un pozo de potencial. El piso está en $\varphi = \pi/2$, de manera que restringimos el intervalo de φ entre 0 y $\pi/2$. La partícula llegará inevitablemente hasta $\varphi = \pi/2$, moviéndose siempre con $\dot{\varphi} > 0$.



Esta clase de análisis es típica de muchos problemas, como el problema de los dos cuerpos o la rotación de la peonza simétrica.

La expresión (27),

$$\tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \tfrac{1}{2}\omega^2 \frac{1-\cos\varphi}{1-\mu\cos^2\varphi} = 0, \tag{30}$$

no sólo sirve para pensar las cosas en términos de un problema unidimensional equivalente, sino que permite conocer $\dot{\varphi}$ en función de la propia coordenada φ. Más aún, si la derivamos una vez respecto del tiempo, podemos expresar $\ddot{\varphi}$ en función de φ. La idea de esto es que si podemos expresar derivadas primeras y segundas en términos del ángulo, entonces podremos averiguar las fuerzas, también como funciones del ángulo. No nos interesa tanto saber en qué momento la masa m_1 se despega del piso, sino para qué ángulo.

Empecemos por escribir $\dot{\varphi}$ como función de φ. A partir de la ecuación (30), obtenemos

$$\dot{\varphi}^2 = \omega^2 \frac{1-\cos\varphi}{1-\mu\cos^2\varphi} \quad\Rightarrow\quad \dot{\varphi} = \omega\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1-\mu\cos^2\varphi}}. \tag{31}$$

Aquí elegimos la rama positiva de la raíz cuadrada, puesto que ya hemos visto que el análisis del problema equivalente, para las condiciones iniciales dadas, implica $\dot{\varphi} > 0$. Incidentalmente, notemos que, en principio, el problema del movimiento está resuelto. La ecuación anterior puede integrarse como

$$\omega t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\phi\,\sqrt{\frac{1-\mu\cos^2\phi}{1-\cos\phi}}. \tag{32}$$

(Aquí φ_0 es el ángulo de inclinación inicial. Si lo eligiésemos igual a cero, evidentemente no habría movimiento). A los fines prácticos esta solución no sirve de mucho.

La ec. (31) da $\dot{\varphi}$ como función de φ. Sin embargo, para calcular $\ddot{\varphi}$ resulta más cómodo derivar $\dot{\varphi}^2$ respecto del tiempo. El cálculo es un poco más llano todavía si notamos que $\dot{\varphi}^2$ es función de $\cos\varphi$, de manera que podemos derivar primero respecto del $\cos\varphi$ y luego respecto del tiempo. En otras palabras

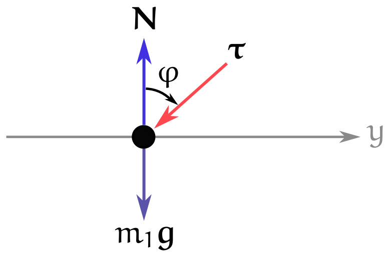
$$\dot{\varphi}^2 = F(\cos\varphi) \quad\Rightarrow\quad 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -F'(\cos\varphi)\sin\varphi\;\dot{\varphi} \quad\Rightarrow\quad \ddot{\varphi} = -\tfrac{1}{2}F'(\cos\varphi)\sin\varphi. \tag{33}$$

Hechas las cuentas, queda

$$\ddot{\varphi} = \frac{1-2\mu\cos\varphi+\mu\cos^2\varphi}{2\left(1-\mu\cos^2\varphi\right)^2}\,\omega^2\sin\varphi. \tag{34}$$

¿Por qué es importante haber escrito $\dot{\varphi}$ y $\ddot{\varphi}$ en función de φ? Porque es a través de $\dot{\varphi}$ y de $\ddot{\varphi}$ que podemos encontrar el valor de la fuerza normal, y saber si se anula para algún valor de φ entre 0 y $\pi/2$. Veamos cómo se llega a ese resultado.

La cuestión es la siguiente: concentrémonos en m_1. Su diagrama de cuerpo libre es



Si m_1 se mueve sólo horizontalmente (tal como estamos suponiendo) entonces la resultante de las fuerzas aplicadas sobre m_1 en la dirección vertical debe anularse. Eso implica

$$N = m_1 g + \tau \cos\varphi. \tag{35}$$

Por otro lado, la componente horizontal de la ecuación de movimiento se lee como

$$m_1 \ddot{y} = -\tau \sin\varphi. \tag{36}$$

Las dos ecuaciones permiten escribir la normal como

$$N = m_1 g - m_1 \ddot{y} \cot\varphi. \tag{37}$$

Lo importante es notar que también podemos escribir $\ddot{y}$ en términos de φ, a través de la ecuación (23), que expresaba la inmovilidad del centro de masa en la dirección horizontal,

$$\dot{y} = -\mu l \dot{\varphi} \cos\varphi. \tag{38}$$

En efecto, derivando respecto del tiempo, es

$$\ddot{y} = -\mu l (\ddot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi). \tag{39}$$

Finalmente,

$$N = m_1 g + m_1 \mu l (\ddot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) \cot\varphi. \tag{40}$$

Una manera más práctica de escribir esto consiste en medir N en unidades de $m_1 g$, dividiendo la expresión anterior por $m_1 g$, con lo que se obtiene

$$\frac{N}{m_1 g} = 1 + \frac{2\mu}{\omega^2} (\ddot{\varphi} \cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) \cot\varphi. \tag{41}$$

Lo único que falta es reemplazar aquí las expresiones que encontramos para $\dot{\varphi}$ y $\ddot{\varphi}$ en función de φ, ecs. (31) y (34). No es una cuenta breve; el resultado final es

$$\frac{N}{m_1 g} = \frac{1 - 2\mu \cos\varphi + \mu \cos^2\varphi}{(1 - \mu \cos^2\varphi)^2}. \tag{42}$$

Es muy fácil demostrar que esta expresión es siempre mayor que cero; queda como ejercicio para ustedes. Basta considerar la función cuadrática

$$f(x) = 1 - 2\mu x + \mu x^2 \tag{43}$$

en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Lo realmente interesante de la ec. (42),

$$\frac{N}{m_1 g} = \frac{1 - 2\mu\cos\varphi + \mu\cos^2\varphi}{(1 - \mu\cos^2\varphi)^2}, \tag{44}$$

es que ya ha aparecido más arriba, cuando calculamos $\ddot{\varphi}$ en función del ángulo φ, ec. (34),

$$\ddot{\varphi} = \frac{1 - 2\mu\cos\varphi + \mu\cos^2\varphi}{2\,(1 - \mu\cos^2\varphi)^2}\;\omega^2\sin\varphi. \tag{45}$$

Es decir, comparando (44) con (45) vemos que

$$\frac{N}{m_1 g} = \frac{2\ddot{\varphi}}{\omega^2\sin\varphi}. \tag{46}$$

¿Es una coincidencia que la larga cadena de cálculos y reemplazos que llevó a la ec. (44) dé un resultado tan simple en términos de $\ddot{\varphi}$? La respuesta es que no se trata de un accidente. Existe un camino alternativo para calcular N que, en 2 líneas, lleva a la expresión (46). Sería muy interesante que pudieran encontrarlo por ustedes mismos. La clave está en la segunda mitad de la primera clase teórica. Los animo a publicar sus resultados en el Campus.

Por último, el gráfico de la normal como función del ángulo para distintos valores del parámetro μ se muestra en la siguiente figura.