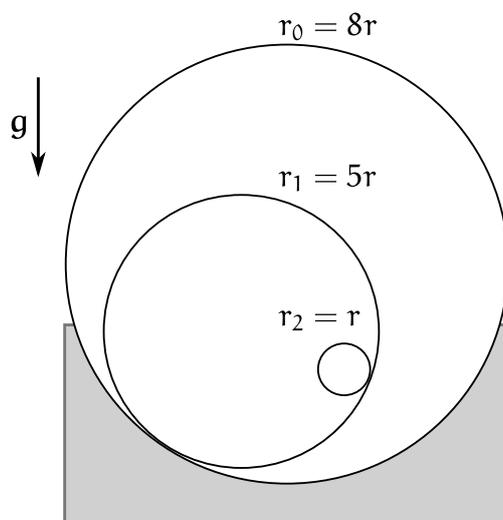


Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021
Clase práctica del lunes 10/5. Guía 4. Pequeñas oscilaciones.*

1. Preliminares	2
1.1. La energía cinética del primer cilindro	2
1.1.1. La primera condición de rodadura	3
1.2. La energía cinética del segundo cilindro	5
1.2.1. La segunda condición de rodadura	6
2. El lagrangiano exacto	7
2.1. Haciendo las cosas más simples	7
3. El lagrangiano de pequeñas oscilaciones	8
3.1. La ecuación característica	9
3.2. Verificaciones y normalización	11
4. La solución general	12
4.1. Condiciones iniciales	12
5. Modos normales de oscilación	13
6. Las coordenadas normales	14
6.1. Verificaciones	16
6.1.1. Ejercicio	16
7. Nota práctica	16
8. Autovalores degenerados	18

■ **Problema 5.** Halle las frecuencias propias, modos y coordenadas normales de un sistema que consta de dos cilindros huecos de masa m y radios r y $5r$, respectivamente, que están colocados uno dentro del otro y que ruedan dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $8r$. No hay deslizamiento.



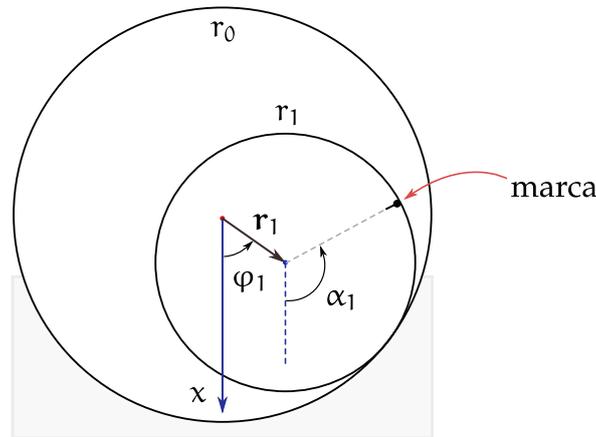
*zanellaj@df.uba.ar

■ Antes que nada tenemos que pensar cómo describir la configuración del sistema. A todos los efectos prácticos, se trata de un sistema bidimensional. Estaremos hablando de cilindros pero los trataremos como tres anillos planos de radios r_0 , r_1 y r_2 .

1. Preliminares

1.1. La energía cinética del primer cilindro

Primero fijemos la atención en el cilindro de radio r_1 . Sin imponer todavía la condición de rodadura, para especificar la configuración de este cilindro debemos informar dónde está su centro y cuál es su orientación. La posición de su centro, \mathbf{r}_1 , queda definida por el ángulo φ_1 que forma el vector \mathbf{r}_1 con la vertical, como muestra la figura. Según acabamos de decir, también tenemos que informar la orientación del cilindro. Imaginemos que hacemos una marca en algún punto de su borde. Entonces la configuración del cilindro se completa informando el valor del ángulo α_1 . El ángulo φ_1 puede tomar un valor determinado y, sin embargo, la posición de la marca puede variar. Por eso es necesario especificar también α_1 .



Para simplificar la notación, definamos

$$\hat{\rho}(\varphi_i) = \hat{\rho}_i, \quad \hat{\varphi}(\varphi_i) = \hat{\varphi}_i. \quad (1)$$

La posición y velocidad del centro de masa del cilindro de radio r_1 son

$$\mathbf{r}_1 = (r_0 - r_1)\hat{\rho}_1, \quad \mathbf{v}_1 = (r_0 - r_1)\dot{\varphi}_1 \hat{\varphi}_1. \quad (2)$$

Además, su velocidad angular es $\Omega_1 = \dot{\alpha}_1$. Más formalmente,

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \dot{\alpha}_1 \hat{z}. \quad (3)$$

La energía cinética de este cilindro es entonces

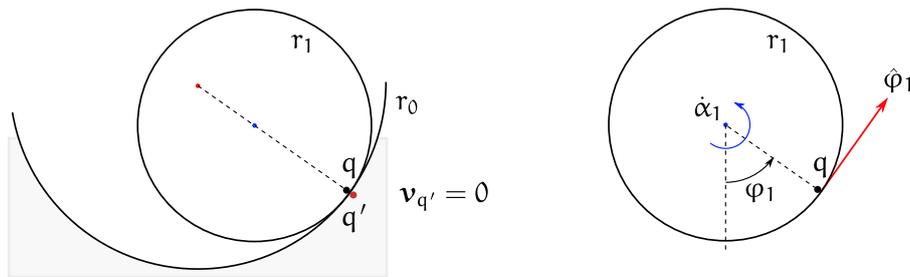
$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 = \frac{1}{2}m(r_0 - r_1)^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}mr_1^2\dot{\alpha}_1^2. \quad (4)$$

Hemos usado que el momento de inercia respecto al centro del cilindro es $I_1 = mr_1^2$.

1.1.1. La primera condición de rodadura

Hasta aquí no hemos dicho nada acerca de una posible relación entre φ_1 y α_1 . Sin la condición de rodadura, ambos ángulos podrían ser simultáneamente coordenadas generalizadas. La condición de rodadura, sin embargo, impone un vínculo entre las variaciones de φ_1 y α_1 . Tenemos que ver si también impone un vínculo entre las propias coordenadas.

Los cilindros de radio r_0 y radio r_1 tienen un punto de contacto (en realidad se tocan a lo largo de un segmento). En el punto de contacto, llamemos q al punto material del cilindro de radio r_1 , y q' al punto material del cilindro de radio r_0 . Están en el mismo lugar, pero pertenecen a dos cuerpos diferentes.



En el punto de contacto, la velocidad de ambas superficies debe ser la misma,

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{v}_{q'}. \quad (5)$$

El cilindro de radio r_0 está fijo, por lo tanto la $\mathbf{v}_{q'} = 0$. ¿Cuál es la velocidad de q ? Debido a que el problema es bidimensional, es sencillo encontrar el valor de \mathbf{v}_q . Esta velocidad puede descomponerse en dos contribuciones: \mathbf{v}_q es igual a la velocidad del centro de masa del cilindro de radio r_1 más la velocidad relativa de q respecto al centro de masa. En la figura de la derecha, es evidente que la velocidad relativa respecto al centro de masa está debida enteramente a la variación de α_1 , tiene la dirección de $\hat{\varphi}_1$ y módulo $r_1\dot{\alpha}_1$. Así,

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{v}_1 + r_1\dot{\alpha}_1 \hat{\varphi}_1 = [(r - r_0)\dot{\varphi}_1 + r_1\dot{\alpha}_1] \hat{\varphi}_1. \quad (6)$$

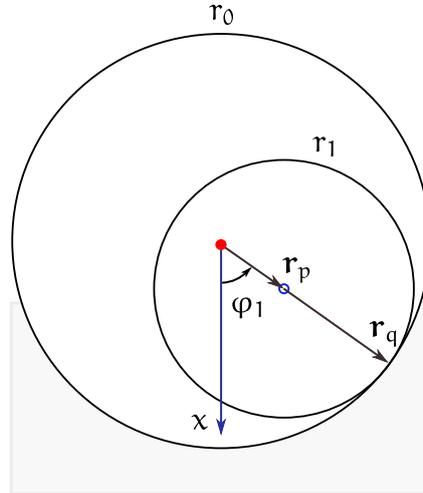
Si quieren una justificación formal, podemos basarnos en lo que deben haber visto hoy en la clase teórica: dado un cuerpo rígido, si especifican su velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ y la velocidad de uno de sus puntos p , entonces la velocidad de cualquier otro punto q del cuerpo rígido es

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{v}_p + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p). \quad (7)$$

En el caso del cilindro de radio r_1 , como punto p usamos el centro de masa,

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_1 = (r_0 - r_1)\hat{\rho}_1. \quad (8)$$

Por otro lado, como muestra la figura, el punto de contacto está es $\mathbf{r}_q = r_0 \hat{\rho}_1$.



Luego, viendo la figura o haciendo explícitamente la diferencia,

$$\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p = r_1 \hat{\rho}_1. \quad (9)$$

Reemplazando estos resultados en la relación fundamental (7), con $\mathbf{\Omega} = \dot{\alpha}_1 \hat{z}$, queda, igual que antes,

$$\mathbf{v}_q = (r_0 - r_1)\dot{\varphi}_1 \hat{\rho}_1 + \dot{\alpha}_1 \hat{z} \times r_1 \hat{\rho}(\varphi_1) = [(r_0 - r_1)\dot{\varphi}_1 + r_1 \dot{\alpha}_1] \hat{\rho}_1. \quad (10)$$

Esta velocidad debe ser igual a la velocidad del punto de contacto perteneciente a la otra superficie que, como ya dijimos, es nula. Entonces,

$$(r_0 - r_1)\dot{\varphi}_1 + r_1 \dot{\alpha}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_1 = -\frac{(r_0 - r_1)}{r_1} \dot{\varphi}_1. \quad (11)$$

En principio, esta no es una relación del tipo $f(\varphi_1, \alpha_1) = 0$ entre las coordenadas, sino una relación entre sus velocidades. Sin embargo es un vínculo integrable:

$$\alpha_1 = \alpha_{10} - \frac{(r_0 - r_1)}{r_1} \varphi_1. \quad (12)$$

Esto significa que el vínculo es holónomo y que la configuración del cilindro de radio r_1 queda determinada por una única coordenada generalizada, digamos φ_1 . Además, como la energía potencial no depende de la orientación del cilindro, α_{10} es irrelevante.

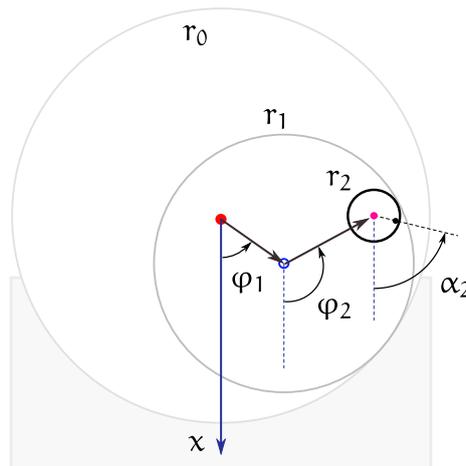
■ Reemplazando la expresión de $\dot{\alpha}_1$ dada por la ec. (11) en la ec. (4) para la energía cinética del cilindro de radio r_1 , encontramos

$$T_1 = \frac{1}{2}m(r_0 - r_1)^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m(r_0 - r_1)^2\dot{\phi}_1^2 = m(r_0 - r_1)^2\dot{\phi}_1^2. \quad (13)$$

La energía cinética de rotación es exactamente igual a la de traslación.

1.2. La energía cinética del segundo cilindro

Pasemos ahora a la descripción de la configuración del cilindro de radio r_2 .



Para llegar a su centro, primero debemos avanzar una distancia $r_0 - r_1$ en la dirección del vector $\hat{\rho}_1$ y luego una distancia $r_1 - r_2$ en la dirección del vector $\hat{\rho}_2$. Es decir,

$$\mathbf{r}_2 = (r_0 - r_1)\hat{\rho}_1 + (r_1 - r_2)\hat{\rho}_2. \quad (14)$$

Así, la velocidad del centro de masa del cilindro de radio r_2 es

$$\mathbf{v}_2 = (r_0 - r_1)\dot{\phi}_1 \hat{\rho}_1 + (r_1 - r_2)\dot{\phi}_2 \hat{\rho}_2. \quad (15)$$

Para describir su orientación, volvemos a hacer una marca sobre el cilindro y definimos el ángulo α_2 , como muestra la figura anterior. La velocidad angular del cilindro es

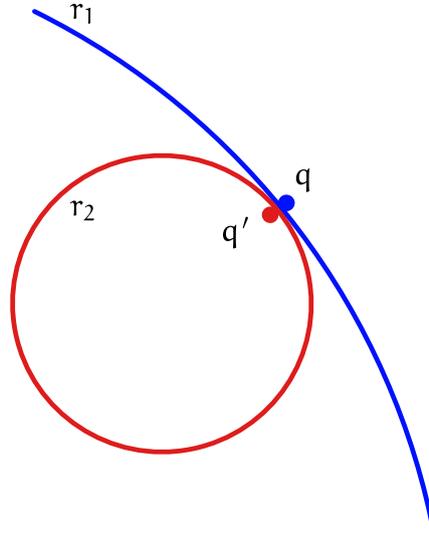
$$\boldsymbol{\Omega}_2 = \dot{\alpha}_2 \hat{z}. \quad (16)$$

Su energía cinética será entonces

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\alpha}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left[(r_0 - r_1)^2\dot{\phi}_1^2 + (r_1 - r_2)^2\dot{\phi}_2^2 + 2(r_0 - r_1)(r_1 - r_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\right] + \frac{1}{2}mr_2^2\dot{\alpha}_2^2. \end{aligned} \quad (17)$$

1.2.1. La segunda condición de rodadura

Analizar la condición de rodadura en esta caso es más interesante, puesto que ambas superficies en contacto están en movimiento. Llamemos q al punto material del cilindro de radio r_1 en contacto con el cilindro de radio r_2 , y análogamente llamemos q' al punto material del cilindro de radio r_2 que está en contacto con el cilindro de radio r_1 .



Debe ser

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{v}_{q'}. \quad (18)$$

A partir de la relación fundamental (7), la velocidad del primer punto es

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{v}_1 + \dot{\alpha}_1 \hat{z} \times r_1 \hat{\rho}_2 = (r_0 - r_1) \dot{\phi}_1 \hat{\phi}_1 + r_1 \dot{\alpha}_1 \hat{\phi}_2. \quad (19)$$

En tanto que la velocidad del punto del otro cilindro es

$$\mathbf{v}_{q'} = \mathbf{v}_2 + \dot{\alpha}_2 \hat{z} \times r_2 \hat{\rho}_2 = (r_0 - r_1) \dot{\phi}_1 \hat{\phi}_1 + (r_1 - r_2) \dot{\phi}_2 \hat{\phi}_2 + r_2 \dot{\alpha}_2 \hat{\phi}_2. \quad (20)$$

Para que no haya deslizamiento, estas dos velocidades deben ser iguales, lo que implica

$$r_1 \dot{\alpha}_1 = (r_1 - r_2) \dot{\phi}_2 + r_2 \dot{\alpha}_2. \quad (21)$$

Usando la ec. (11), que especificaba $\dot{\alpha}_1$ en términos de $\dot{\phi}_1$, de aquí despejamos $\dot{\alpha}_2$,

$$\dot{\alpha}_2 = -\frac{1}{r_2} [(r_0 - r_1) \dot{\phi}_1 + (r_1 - r_2) \dot{\phi}_2]. \quad (22)$$

Nuevamente, esta relación es integrable y el vínculo es holónomo. No se dejen engañar por estos problemas bidimensionales. En tres dimensiones las condiciones de rodadura suelen ser no holónomas.

■ Reemplazando el valor de $\dot{\alpha}_2$ en la expresión (17) para la energía cinética del cilindro de radio r_2 , encontramos

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m \left[(r_0 - r_1)^2 \dot{\varphi}_1^2 + (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2(r_0 - r_1)(r_1 - r_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}m \left[(r_0 - r_1)^2 \dot{\varphi}_1^2 + (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2(r_0 - r_1)(r_1 - r_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right] \\ &= m \left\{ (r_0 - r_1)^2 \dot{\varphi}_1^2 + (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}_2^2 + (r_0 - r_1)(r_1 - r_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

2. El lagrangiano exacto

Para escribir el lagrangiano empezamos por la energía cinética. De acuerdo a las ecs. (13) y (23), es

$$T = m \left\{ 2(r_0 - r_1)^2 \dot{\varphi}_1^2 + (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}_2^2 + (r_0 - r_1)(r_1 - r_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \right\}. \quad (24)$$

Puesto que los centros de masa de los cilindros de radio r_1 y r_2 están, respectivamente, en las posiciones

$$\mathbf{r}_1 = (r_0 - r_1)\hat{\rho}_1, \quad \mathbf{r}_2 = (r_0 - r_1)\hat{\rho}_1 + (r_1 - r_2)\hat{\rho}_2, \quad (25)$$

la energía potencial es

$$V = -mg(x_1 + x_2) = -mg[2(r_0 - r_1) \cos \varphi_1 + (r_1 - r_2) \cos \varphi_2]. \quad (26)$$

Definamos

$$\Delta_j = \frac{r_{j-1} - r_j}{r}. \quad (27)$$

Debido a que todos los radios están expresados como múltiplos enteros de r , estas cantidades serán números enteros. Usando esta definición, finalmente el lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) &= mr^2 \left\{ 2\Delta_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \Delta_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \Delta_1 \Delta_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \right\} \\ &\quad + mgr (2\Delta_1 \cos \varphi_1 + \Delta_2 \cos \varphi_2). \end{aligned} \quad (28)$$

2.1. Haciendo las cosas más simples

Multiplicar al lagrangiano por una constante no modifica las ecuaciones de movimiento. Aquí resulta útil dividir \mathcal{L} por mr^2 , introduciendo la frecuencia $\omega_0^2 = g/r$. Así, a todos los efectos prácticos, nuestro lagrangiano se lee como [usaremos siempre el mismo símbolo \mathcal{L}]

$$\mathcal{L} = 2\Delta_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \Delta_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \Delta_1 \Delta_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \omega_0^2 (2\Delta_1 \cos \varphi_1 + \Delta_2 \cos \varphi_2). \quad (29)$$

En pequeñas oscilaciones es fundamental dejar escrito el lagrangiano de la manera más simple posible. Si pueden eliminar parámetros multiplicando por una constante, háganlo. Todo lo que no eliminen pasará a formar parte del problema de autovalores y autovectores.

También es útil eliminar parámetros antes de hacer simulaciones numéricas. Otra de las cosas que podríamos eliminar en el lagrangiano anterior es ω_0^2 . Esto se logra dividiendo \mathcal{L} por ω_0^2 . Al dividir por ω_0^2 , en los términos cinéticos aparecerán cosas de la forma

$$\frac{1}{\omega_0^2} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j. \quad (30)$$

Si cambiamos de variable independiente, introduciendo la variable adimensional

$$\tau = \omega_0 t, \quad (31)$$

e indicamos con un primado la derivación respecto de τ , entonces

$$\frac{1}{\omega_0^2} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j = \varphi'_i \varphi'_j. \quad (32)$$

Esto equivale a tomar unidades de tiempo tales que $\omega_0 = 1$. El nuevo lagrangiano será

$$\mathcal{L} = 2\Delta_1^2 \varphi_1'^2 + \Delta_2^2 \varphi_2'^2 + \Delta_1 \Delta_2 \varphi_1' \varphi_2' [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + 2\Delta_1 \cos \varphi_1 + \Delta_2 \cos \varphi_2. \quad (33)$$

Todo aquí es adimensional. Las ecuaciones de movimiento dependerán sólo de los parámetros Δ_i . En una simulación numérica sabremos además que $\Delta\tau = 1$ es el tiempo típico.

3. El lagrangiano de pequeñas oscilaciones

La configuración de equilibrio estable es $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, de manera que las coordenadas de pequeñas oscilaciones son los propios ángulos φ_1 y φ_2 . El lagrangiano exacto era

$$\mathcal{L} = 2\Delta_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \Delta_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \Delta_1 \Delta_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \omega_0^2 (2\Delta_1 \cos \varphi_1 + \Delta_2 \cos \varphi_2). \quad (34)$$

Al estudiar pequeñas oscilaciones alrededor de $\varphi_i = 0$, en la energía cinética el coseno de la diferencia puede aproximarse por 1. En la energía potencial desarrollamos los cosenos hasta orden cuadrático. El lagrangiano de pequeñas oscilaciones es

$$\mathcal{L}^{\text{osc}} = \frac{1}{2} \left\{ 4\Delta_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2\Delta_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 4\Delta_1 \Delta_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right\} - \frac{1}{2} \omega_0^2 (2\Delta_1 \varphi_1^2 + \Delta_2 \varphi_2^2). \quad (35)$$

Aquí hemos omitido el valor constante del potencial en $\varphi_i = 0$, y hemos sacado a propósito factores $\frac{1}{2}$ fuera de las expresiones de las energías cinética y potencial. Hacemos esto para leer más directamente las matrices \mathbb{M} y \mathbb{V} .

Definamos un vector cuyas componentes sean las coordenadas de pequeñas oscilaciones,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Sin que haya riesgo de confusión por no usar el signo de transposición, podemos escribir el lagrangiano de pequeñas oscilaciones en forma matricial como

$$\mathcal{L}^{\text{osc}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbb{V} \cdot \mathbf{x}, \quad (37)$$

donde la matriz energía cinética es

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 4\Delta_1^2 & 2\Delta_1\Delta_2 \\ 2\Delta_1\Delta_2 & 2\Delta_2^2 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

y la matriz energía potencial,

$$\mathbb{V} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2\Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

3.1. La ecuación característica

Recordemos que, en general, las ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano de la forma (37), con matrices \mathbb{M} y \mathbb{V} simétricas, son

$$\mathbb{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbb{V} \cdot \mathbf{x} = 0. \quad (40)$$

Proponiendo soluciones de la forma $\mathbf{x} = e^{i\omega t} \mathbf{A}$, resulta la ecuación

$$(\omega^2 \mathbb{M} - \mathbb{V}) \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (41)$$

Para que haya soluciones no triviales, debe ser cero el determinante de $\omega^2 \mathbb{M} - \mathbb{V}$. Aquí

$$\det(\omega^2 \mathbb{M} - \mathbb{V}) = \det \begin{pmatrix} 4\omega^2 \Delta_1^2 - 2\omega_0^2 \Delta_1 & 2\omega^2 \Delta_1 \Delta_2 \\ 2\omega^2 \Delta_1 \Delta_2 & 2\omega^2 \Delta_2^2 - \omega_0^2 \Delta_2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$= \omega_0^4 \Delta_1 \Delta_2 \det \begin{pmatrix} 4\lambda \Delta_1 - 2 & 2\lambda \Delta_2 \\ 2\lambda \Delta_1 & 2\lambda \Delta_2 - 1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

donde

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}. \quad (44)$$

Noten que hemos usado algunas propiedades elementales para simplificar el determinante. No hicimos más que sacar factores comunes por filas y en toda la matriz. Si van a hacer estas cuentas a mano, es muy importante que usen todas las propiedades de los determinantes que conozcan para simplificar el cálculo. Aún en problemas con matrices de 4×4 es posible simplificar grandemente los determinantes. Se usan propiedades tales como la invariancia del determinante si a una fila se le suma otra multiplicada por una constante, y se intenta así anular el mayor número posible de elementos.

En resumen, hemos reducido el problema algebraico a calcular las raíces de la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} 4\lambda\Delta_1 - 2 & 2\lambda\Delta_2 \\ 2\lambda\Delta_1 & 2\lambda\Delta_2 - 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2\Delta_1\Delta_2\lambda^2 - 2(\Delta_1 + \Delta_2)\lambda + 1 = 0. \quad (45)$$

Las dos raíces siempre son distintas, independientemente de los valores de los Δ_i :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 \pm \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}}{2\Delta_1\Delta_2}. \quad (46)$$

Para los valores dados en el enunciado, $\Delta_1 = 3$ y $\Delta_2 = 4$, y resulta

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{12}. \quad (47)$$

Puesto que $\lambda_i = \omega_i^2/\omega_0^2$, esto significa que las frecuencias normales son

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0, \quad \omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \omega_0. \quad (48)$$

Por otro lado, escribamos los autovectores del problema como

$$\mathbf{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{1,2} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Podemos trabajar directamente con la matriz que aparece en la ec. (45). Para estos valores de los Δ_i , ustedes pueden verificar que

$$\mathbf{a}_1 = -1, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{3}{2}. \quad (50)$$

Así resultan

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

3.2. Verificaciones y normalización

Se pueden hacer varios chequeos. En primer lugar, deberían ver que las dos ecuaciones que podemos formar para las componentes de los autovectores son linealmente dependientes, lo que asegura que las raíces del determinante están bien calculadas. Por ejemplo, para la raíz $\lambda = \frac{1}{2}$, las dos ecuaciones para las componentes del autovector son

$$4a + 4b = 0, \quad (52)$$

$$3a + 3b = 0. \quad (53)$$

En segundo lugar, deberíamos verificar que los autovectores son ortogonales respecto a la matriz energía cinética y, de paso, normalizarlos. Para los valores dados de los Δ_i , la matriz energía cinética es

$$\mathbb{M} = 4 \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Luego, en menos de lo que tarda en decirse,

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}_1 = 20, \quad (55)$$

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}_2 = 0, \quad (56)$$

$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}_2 = 180. \quad (57)$$

En efecto, \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 resultan ortogonales respecto de \mathbb{M} . Las constantes de normalización son un poco incómodas. Los autovectores normalizados son

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{A}_1}{\sqrt{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}_1}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{\mathbf{A}_2}{\sqrt{\mathbf{A}_2 \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}_2}} = \frac{1}{6\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

En general, puede demostrarse que para autovectores de frecuencias diferentes resulta

$$\mathbf{A}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}_j \propto \delta_{ij}. \quad (59)$$

Es importante notar que cuando hay frecuencias degeneradas, es decir, frecuencias a las que corresponde más de un autovector, estos no resultan automáticamente ortogonales. Pero pueden tomarse combinaciones lineales que sí lo sean. Como veremos a continuación, en la práctica es simplificador trabajar con autovectores que sean todos ortogonales entre sí, incluso los que correspondan a una misma frecuencia, aunque en principio bastaría que estos fueran sólo linealmente independientes. Más al respecto en la última sección.

4. La solución general

Cuando no hay autovectores de frecuencia nula, la solución general de las ecuaciones de movimiento para el lagrangiano de pequeñas oscilaciones es

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n (C_i \cos \omega_i t + C'_i \sin \omega_i t) \mathbf{X}_i. \quad (60)$$

En este problema $n = 2$. Aquí daría lo mismo que escribieran \mathbf{A}_i en lugar de los \mathbf{X}_i . Con toda seguridad habrán visto maneras alternativas de escribir esta solución. En la práctica, para fijar condiciones iniciales, la manera aquí mostrada es muy eficiente, porque las constantes C_i están asociadas a la amplitud inicial y las constantes C'_i a la velocidad inicial, como se verá a continuación.

4.1. Condiciones iniciales

Las constantes C_i y C'_i se obtienen de las condiciones iniciales. Aquí resulta muy útil la ortonormalidad de los autovectores \mathbf{X}_i . Evaluando las posiciones en $t = 0$, resulta

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{X}_j. \quad (61)$$

Multiplicando ambos miembros por $\mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M}$, es fácil ver que

$$C_i = \mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}(0). \quad (62)$$

Asimismo, la condición para la velocidad inicial,

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \sum_{j=1}^n \omega_j C'_j \mathbf{X}_j, \quad (63)$$

implica

$$C'_i = \frac{1}{\omega_i} \mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}(0). \quad (64)$$

Claramente no podemos hacer lo mismo para un autovector de frecuencia nula. El método tampoco sirve si los autovectores de los autovalores degenerados no están ortonormalizados.

Si a la solución la hubiéramos escrito en términos de las funciones $a_i \sin(\omega_i t + \beta_i)$, por ejemplo, la relación entre el conjunto de constantes a_i y β_i y las condiciones iniciales hubiera sido

$$a_i \sin \beta_i = \mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}(0), \quad \omega_i a_i \cos \beta_i = \mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}(0), \quad (65)$$

y no sería tan inmediato despejar las constantes a_i y β_i .

5. Modos normales de oscilación

Si tanto $\mathbf{x}(0)$ como $\dot{\mathbf{x}}(0)$ son proporcionales al mismo autovector \mathbf{X}_ℓ , entonces únicamente C_ℓ y C'_ℓ son distintas de cero. Para afirmar esto sólo tenemos que recurrir a la independencia lineal de los autovectores, y no a su ortogonalidad. Decimos entonces que el sistema oscila según el modo normal ℓ -ésimo. En un movimiento de este tipo, la configuración del sistema evoluciona como

$$\mathbf{x}^{(\ell)}(t) = \alpha \cos(\omega_\ell t + \beta) \mathbf{X}_\ell. \quad (66)$$

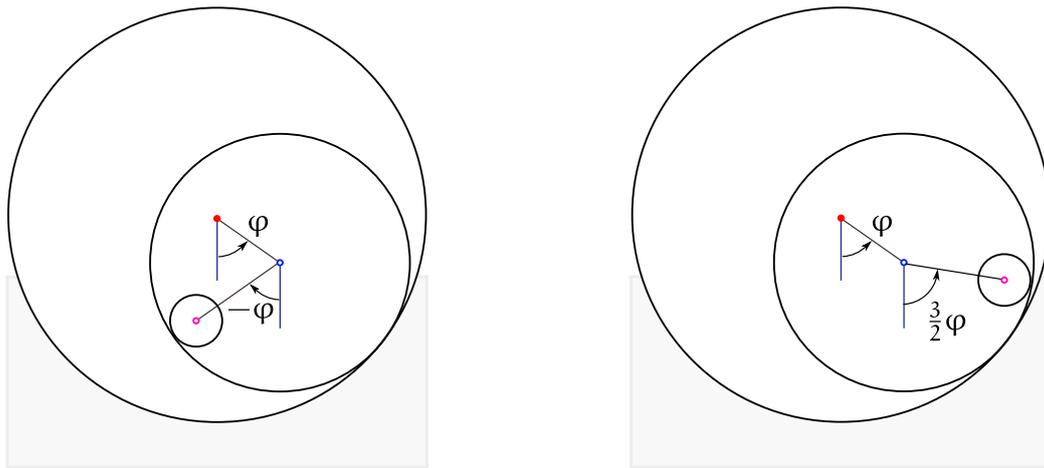
El vector $\mathbf{x}^{(\ell)}(t)$ es el modo normal ℓ -ésimo. Noten que esto representa toda una familia de funciones del tiempo, caracterizadas por α y por β .

Los autovectores \mathbf{X}_i (pero, para el caso, es más fácil trabajar con los \mathbf{A}_i) dan una rápida idea del movimiento del sistema en un modo normal. El valor absoluto de cada componente da el módulo de la amplitud relativa de la respectiva coordenada, y el signo dice si se mueve en fase o en contrafase en relación a las otras coordenadas.

Para este problema resultaban

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad (67)$$

En el primer modo, los cilindros se mueven en contrafase, pero los módulos de las amplitudes de φ_1 y φ_2 siempre son iguales. En el segundo modo, los cilindros se mueven en fase, pero hay una relación 2:3 entre las amplitudes de los ángulos. Las figuras muestran esquemáticamente cada modo.



Sólo con fines ilustrativos, las amplitudes hay sido exageradas más allá de lo que podríamos considerar pequeñas oscilaciones.

Por último, no hay que confundir modos normales con coordenadas normales, que es el tema de la siguiente sección.

6. Las coordenadas normales

Las coordenadas normales ξ_i son aquellas combinaciones lineales de las coordenadas x_i que separan completamente el lagrangiano de pequeñas oscilaciones y que hacen que la matriz energía cinética sea la identidad,

$$\mathcal{L}^*(\xi, \dot{\xi}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\dot{\xi}_i^2 - \omega_i^2 \xi_i^2 \right). \quad (68)$$

Sus ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0. \quad (69)$$

Para obtener cuáles son estas combinaciones, podemos reescribir la solución general (60),

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n (C_j \cos \omega_j t + C'_j \sin \omega_j t) \mathbf{X}_j, \quad (70)$$

como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t) \mathbf{X}_j. \quad (71)$$

Esto ya no hay que verlo como una relación entre funciones del tiempo sino como una transformación entre las coordenadas generalizadas x_i y las f_i . Por construcción, las funciones f_i satisfacen las ecuaciones diferenciales (69), de manera que si logramos despejar las funciones f_i del sistema de ecs. (71) obtendremos, salvo por una constante multiplicativa, las combinaciones ξ_i .

Multiplicando escalarmente la ec. (71) por $\mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M}$ y usando la ortonormalidad de los autovectores, encontramos

$$f_i = \mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}. \quad (72)$$

Tenemos que ver si es necesario multiplicar a las f_i por alguna constante o si son directamente las ξ_i que estamos buscando. Sabemos que las f_i satisfacen las ecuaciones (69), lo que no sabemos es si el término cinético en el nuevo lagrangiano es de la forma buscada,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{f}_i^2. \quad (73)$$

Para las coordenadas generalizadas f_i , el término cinético en el nuevo lagrangiano es

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \dot{f}_i \mathbf{X}_i \right) \cdot \mathbb{M} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \dot{f}_j \mathbf{X}_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \dot{f}_i \dot{f}_j \mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{X}_j. \quad (74)$$

Ahora bien, usando la ortonormalidad de los autovectores \mathbf{X}_i respecto de \mathbb{M} , resulta

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\xi}_i^2. \quad (75)$$

Esto quiere decir que las f_i son directamente las coordenadas normales ξ_i ,

$$\xi_i = \mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}. \quad (76)$$

La ortonormalidad de los autovectores se encarga de todo.

En el problema de los dos cilindros, con muy poco trabajo deberían poder verificar que las coordenadas normales están dadas por

$$\xi_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}(3\varphi_1 - 2\varphi_2), \quad (77)$$

$$\xi_2 = \frac{12}{\sqrt{5}}(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (78)$$

Hemos comprobado que el término cinético en el nuevo lagrangiano toma la forma adecuada (75). Podemos hacer lo mismo con el término potencial. Noten lo siguiente: puesto que

$$\mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{X}_j = \delta_{ij}, \quad (79)$$

y además

$$\omega_j^2 \mathbb{M} \cdot \mathbf{X}_j = \mathbb{V} \cdot \mathbf{X}_j, \quad (80)$$

entonces

$$\mathbf{X}_i \cdot \mathbb{V} \cdot \mathbf{X}_j = \delta_{ij} \omega_i^2. \quad (81)$$

De forma que los autovectores \mathbf{X}_i también son ortogonales respecto a la matriz \mathbb{V} . Así, de modo completamente análogo a lo que hicimos antes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbb{V} \cdot \mathbf{x} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{X}_i \right) \cdot \mathbb{V} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \mathbf{X}_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j \mathbf{X}_i \cdot \mathbb{V} \cdot \mathbf{X}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \xi_i^2. \end{aligned} \quad (82)$$

Esto termina de demostrar que el nuevo lagrangiano es

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbb{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbb{V} \cdot \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{\xi}_i^2 - \omega_i^2 \xi_i^2). \quad (83)$$

6.1. Verificaciones

Invirtiendo las ecs. (77) y (78), de manera no muy grata obtenemos

$$\varphi_1 = \frac{1}{6\sqrt{5}}(3\xi_1 + \xi_2), \quad (84)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\sqrt{5}}(-2\xi_1 + \xi_2) \quad (85)$$

Mediante el cálculo directo deberían verificar que

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbb{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2, \quad (86)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbb{V} \cdot \mathbf{x} = \frac{\omega_0^2}{2}\xi_1^2 + \frac{\omega_0^2}{12}\xi_2^2. \quad (87)$$

Esto refuerza nuestra fe en que el nuevo lagrangiano es lo que tiene que ser:

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = \frac{1}{2} \left(\dot{\xi}_1^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\xi_1^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\dot{\xi}_2^2 - \frac{\omega_0^2}{12}\xi_2^2 \right). \quad (88)$$

Verificaciones al margen, lo único que necesitan recordar es que

$$\xi_i = \mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}. \quad (89)$$

6.1.1. Ejercicio

Noten como algo fundamental el hecho de que los autovectores \mathbf{X}_i estuvieran normalizados. Si trabajasen con los autovectores \mathbf{A}_i , escribiendo $\mathbf{x} = \sum_i f'_i \mathbf{A}_i$, al final del cálculo encontrarían que las coordenadas normales no son las f'_i sino las f'_i *multiplicadas* por el módulo, respecto de \mathbb{M} , del autovector \mathbf{A}_i . Esta comprobación queda como ejercicio. En la práctica, trabajar con los autovectores \mathbf{A}_i y hacer la normalización recién al final suele ser lo más cómodo, para arrastrar la menor cantidad de factores numéricos.

7. Nota práctica

Este problema sirvió como ejemplo del método general para obtener las coordenadas normales mediante la ortonormalidad de los autovectores respecto de la matriz \mathbb{M} . Pero, en realidad, en un problema con sólo dos coordenadas generalizadas resulta más simple seguir un método directo, que incluso en problemas con mayor número de grados de libertad, si los autovectores son lo suficientemente sencillos, puede ser más práctico. Es decir, no siempre es necesario despejar las coordenadas f_i recurriendo al truco de aplicar el operador $\mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M}$, o bien $\mathbf{A}_i \cdot \mathbb{M}$. Ilustraremos este punto con el problema de los dos cilindros, que sólo tiene dos coordenadas generalizadas.

Siguiendo los mismos pasos que antes, empecemos notando que la solución general para la evolución de φ_1 y φ_2 está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^2 f_j(t) \mathbf{A}_j, \quad (90)$$

donde las funciones $f_j(t)$ son soluciones de la ecuación del oscilador armónico simple de frecuencia ω_j . Pero fíjense que aquí, a diferencia de la ec. (71), ni siquiera nos tomamos el trabajo de normalizar los autovectores. Evidentemente las funciones f_j de ahora no serán exactamente las mismas de antes, sino que diferirán en una constante multiplicativa. Eso no es importante. El objetivo es llegar rápidamente a las coordenadas normales. Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad (91)$$

escrita por extenso, la ecuación (90) se lee de manera inmediata como

$$\varphi_1 = f_1 + f_2, \quad (92)$$

$$\varphi_2 = -f_1 + \frac{3}{2}f_2. \quad (93)$$

Sin necesidad de recurrir al producto escalar con $\mathbf{A}_i \cdot \mathbb{M}$, de aquí despejamos

$$f_1 = \frac{1}{5}(3\varphi_1 - 2\varphi_2), \quad (94)$$

$$f_2 = \frac{2}{5}(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (95)$$

Debido a que no usamos los autovectores normalizados, todo lo que podemos decir es que estas expresiones son las coordenadas normales salvo constantes multiplicativas,

$$\xi_1 = c_1(3\varphi_1 - 2\varphi_2), \quad (96)$$

$$\xi_2 = c_2(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (97)$$

Comparando con las ecs. (77) y (78), pueden verificar que lo que decimos es cierto.

Ahora bien, qué pasaría si definiésemos nuevas coordenadas mediante la elección más sencilla de las constantes c_i :

$$\chi_1 = 3\varphi_1 - 2\varphi_2, \quad (98)$$

$$\chi_2 = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (99)$$

Las nuevas coordenadas diagonalizarán igualmente el lagrangiano, es decir, lo separarán en la suma de dos lagrangianos, uno para cada coordenada, aunque no lo llevarán a la forma canónica en la que el término cinético de cada lagrangiano es igual a $\frac{1}{2}$ y, por lo tanto, cada término del potencial es proporcional a $\frac{1}{2}\omega_i^2$. Sin embargo, el trabajo pesado, que es la separación del lagrangiano, estará cumplido. Si no son muy impresionables, queda como ejercicio que verifiquen que, en las nuevas coordenadas χ_i , el lagrangiano se separa como

$$\mathcal{L}'(\chi, \dot{\chi}) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\dot{\chi}_1^2 - \frac{2}{5}\omega_0^2\chi_1^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{144}{5}\dot{\chi}_2^2 - \frac{12}{5}\omega_0^2\chi_2^2 \right). \quad (100)$$

Para definir las coordenadas normales habrá que tomar $\xi_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\chi_1$ y $\xi_2 = \frac{12}{\sqrt{5}}\chi_2$.

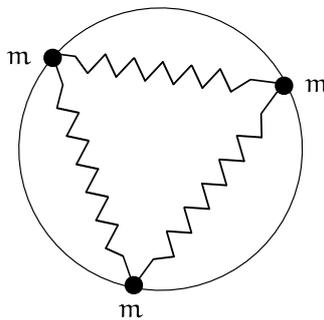
Si en un problema sólo les piden que encuentren coordenadas en las cuales el lagrangiano se separe, alcanzará con elegir en las ecs. (96) y (97) las constantes c_i que den las expresiones más sencillas para las coordenadas χ_i . Según acabamos de ver, si el problema tiene pocos grados de libertad, esto lo pueden hacer por simple inspección, y si eso no es tan sencillo, entonces podrán usar la *ortogonalidad* de los autovectores \mathbf{A}_i , escribiendo

$$\chi_i = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}. \quad (101)$$

8. Autovalores degenerados

A modo de advertencia, tengan en cuenta que los autovectores \mathbf{A}_i correspondientes a raíces degeneradas no serán automáticamente ortogonales y, por lo tanto, muchas de las fórmulas anteriores no serán válidas. En lo que respecta a la solución de las ecuaciones de movimiento, basta con tener autovectores linealmente independientes. La condición de ortogonalidad se pide para hacer las cuentas más simples y para poder separar el lagrangiano.

Por ejemplo, veamos el problema de las tres masas iguales en un aro.



La clase pasada mostramos que, bajo determinadas circunstancias, la configuración de triángulo equilátero es una configuración de equilibrio estable. Eligiendo adecuadamente las unidades, el lagrangiano de pequeñas oscilaciones es

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3). \quad (102)$$

Las matrices de energía cinética y energía potencial son

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (103)$$

El valor de ω_0 está relacionado con el radio del aro y con la constante elástica y la longitud natural del resorte; aquí no nos interesa escribirlo explícitamente. Definiendo

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad (104)$$

a todos los efectos prácticos, la matriz del problema de autovectores y autovalores es

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}. \quad (105)$$

Hay una raíz doblemente degenerada. Las frecuencias normales están dadas por

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \omega_3^2 = 3\omega_0^2. \quad (106)$$

Encontrarán que el autovector para el autovalor $\omega_1^2 = 0$ es

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (107)$$

Pero cuando quieran calcular los autovectores correspondientes al autovalor $3\omega_0^2$, encontrarán que sus componentes deben satisfacer una única ecuación

$$a + b + c = 0. \quad (108)$$

Si la raíz fuera no degenerada obtendrían dos ecuaciones, y podrían calcular el autovector salvo una constante multiplicativa. Pero en este caso sólo tienen una ecuación y todo un plano de autovectores, no una recta. Hay que elegir dos que sean linealmente independientes. Una elección especialmente simple es tomar

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (109)$$

La matriz energía cinética en este problema es la identidad, de manera que es evidente que estos autovectores no son ortogonales. Notar que \mathbf{A}_1 sí es ortogonal a \mathbf{A}_2 y a \mathbf{A}_3 .

La solución general es, como siempre,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^3 f_j \mathbf{A}_j, \quad (110)$$

donde $f_1 = C_1 + C_1' t$ y las otras dos f_i son soluciones del problema del oscilador armónico con la misma frecuencia, $\omega^2 = 3\omega_0^2$. Los tres autovectores linealmente independientes, aunque no ortogonales, definen tres modos independientes de oscilación del sistema:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = (C + C't)\mathbf{A}_1, \quad (111)$$

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = C \cos(\omega t + C') \mathbf{A}_2, \quad (112)$$

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = C \cos(\omega t + C') \mathbf{A}_3, \quad (113)$$

aunque el primero no es estrictamente un modo de oscilación. Si $\mathbf{x}(0)$ y $\dot{\mathbf{x}}(0)$ son proporcionales al mismo autovector \mathbf{A}_ℓ , entonces el sistema oscilará en el modo ℓ -ésimo.

Para analizar la cuestión de las coordenadas normales, a la ec. (110) la pensamos de nuevo como una transformación de coordenadas generalizadas. No podemos usar la ortogonalidad de los \mathbf{A}_i para despejar las coordenadas f_i en términos de las coordenadas x_i , puesto que, como observamos, los autovectores no son todos ortogonales. Pero sustituyendo explícitamente los autovectores \mathbf{A}_i , el problema de encontrar las coordenadas f_i toma la forma del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 = f_1 + f_3, \quad (114)$$

$$x_2 = f_1 + f_2, \quad (115)$$

$$x_3 = f_1 - f_2 - f_3. \quad (116)$$

El sistema se resuelve a simple vista. Resulta

$$f_1 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad (117)$$

$$f_2 = \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 - x_3), \quad (118)$$

$$f_3 = \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - x_3). \quad (119)$$

Si quieren ver cuál es el lagrangiano en las nuevas variables, reemplacen en el lagrangiano original las coordenadas x_i en términos de las f_i , usando las ecs. (114)—(116). El resultado al que deberían llegar es

$$\mathcal{L}'(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) = \frac{1}{2}\dot{f}_1^2 + (\dot{f}_2^2 + \dot{f}_2\dot{f}_3 + \dot{f}_3^2) - 3\omega_0^2(f_2^2 + f_2f_3 + f_3^2). \quad (120)$$

Vemos que el lagrangiano no se separa completamente. Las coordenadas f_2 y f_3 permanecen acopladas. Para remediar esto deberíamos reemplazar \mathbf{A}_2 y \mathbf{A}_3 por combinaciones lineales que resulten ortogonales respecto de \mathbb{M} . Lo más sencillo sería quedarnos con \mathbf{A}_2 y buscar otro \mathbf{A}_3 perpendicular a \mathbf{A}_2 y tal que sus componentes satisfagan la ec. (116),

$$a + b + c = 0. \quad (121)$$

Si bien eso sería correcto, romperíamos la simetría entre los modos. Para tratar de mantener esta simetría busquemos dos vectores perpendiculares, en el plano definido por la ec. (121), y que sean de la forma

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (122)$$

Deberán cumplirse entonces las siguientes relaciones

$$a + b + 1 = 0, \quad 2ab + 1 = 0. \quad (123)$$

Una solución es

$$a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \quad b = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}. \quad (124)$$

Para esta elección, la relación entre las coordenadas originales y las coordenadas f_i es

$$x_1 = f_1 + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}f_3, \quad (125)$$

$$x_2 = f_1 - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}f_2 + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}f_3, \quad (126)$$

$$x_3 = f_1 + f_2 + f_3. \quad (127)$$

Sustituyendo estas expresiones en el lagrangiano original obtenemos el lagrangiano en las nuevas coordenadas. Las cuentas son tediosas, pero el resultado es el que esperábamos:

$$\mathcal{L}'(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) = \frac{3}{2}\dot{f}_1^2 + \frac{3}{2}(\dot{f}_2^2 + \dot{f}_3^2) - \frac{9}{2}\omega_0^2(f_2^2 + f_3^2). \quad (128)$$

El lagrangiano se separa completamente. Si definimos $\xi_i = \sqrt{3}f_i$, obtenemos

$$\mathcal{L}''(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2}\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2}(\dot{\xi}_2^2 - 3\omega_0^2\xi_3^2) + \frac{1}{2}(\dot{\xi}_3^2 - 3\omega_0^2\xi_3^2). \quad (129)$$

Ahora la matriz energía cinética es la identidad. Por lo tanto las coordenadas ξ_i son un conjunto posible de coordenadas normales. Su relación con las coordenadas originales es

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3), \quad (130)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(-1 + \sqrt{3})x_1 - (1 + \sqrt{3})x_2 + 2x_3 \right], \quad (131)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[-(1 + \sqrt{3})x_1 + (-1 + \sqrt{3})x_2 + 2x_3 \right]. \quad (132)$$