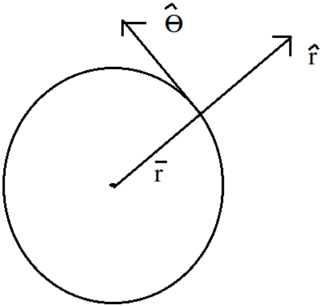
saldando deudas

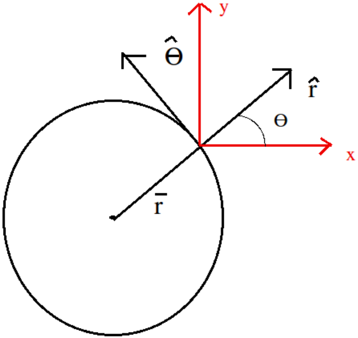
¿Cómo se escribe la velocidad y la aceleración en coordenadas polares?



$$\vec{r} = r\hat{r} \tag{1}$$

$$\vec{\theta} = r\hat{\theta} \tag{2}$$

Equivalencia entre cartesianas y polares



$$\hat{r} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\mathrm{sen}\theta \qquad (3)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x}\mathrm{sen}\theta + \hat{y}\cos\theta \qquad (4)$$

Velocidad

Hay que derivar en el tiempo al vector "r":

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \tag{5}$$

El versor "r" derivado hay que trabajarlo para que quede en términos de los versores de polares sin derivar en el tiempo.

$$\dot{\hat{r}} = -\hat{x}\dot{\theta}\mathrm{sen}\theta + \hat{y}\dot{\theta}\cos\theta = \dot{\theta}(-\hat{x}\mathrm{sen}\theta + \hat{y}\cos\theta) = \dot{\theta}\hat{\theta} \tag{6}$$

En consecuencia:

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}} \tag{7}$$

Aceleración

Se vuelve a derivar en el tiempo

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} \tag{8}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\color{red}{\dot{\hat{\theta}}} \tag{9}$$

Vamos por el versor en rojo

$$\dot{\hat{\theta}} = -\hat{x}\dot{\theta}\cos\theta - \hat{y}\dot{\theta}\mathrm{sen}\theta = -\dot{\theta}(\hat{\mathrm{x}}\cos\theta + \hat{\mathrm{y}}\mathrm{sen}\theta) = -\dot{\theta}\hat{\mathrm{r}} \tag{10}$$

Ahora lo reemplazamos en la expresión para la aceleración:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\dot{\hat{r}} \tag{11}$$

Reacomodandum:

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}} \tag{12}$$

Comentarios

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}} \tag{13}$$

Se puede reescribir un poco:

$$\boxed{a_c = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)} \qquad \boxed{a_{tg} = +(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})} \tag{14}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_c\hat{r} + a_{tg}\hat{\theta}} \tag{15}$$

En un movimiento circular: $r = cte \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = 0$

$$\boxed{a_c = -r\dot{\theta}^2} \qquad \boxed{a_{tg} = r\ddot{\theta}} \tag{16}$$

Si $\dot{\theta} = cte \Rightarrow \dot{\theta} \equiv \omega$

$$\boxed{a_c = -r\omega^2} \qquad \boxed{a_{tg} = 0 \Rightarrow v_{tg} = r\omega} \tag{17}$$

queda un movimiento circular uniforme.

Si el movimiento es circular uniformemente variado, quiere decir que

$\ddot{\theta} = cte \Rightarrow \gamma \equiv \ddot{\theta}$

$$a_{tg} = \gamma \Rightarrow \boxed{v_{tg}(t) = r\omega_0 + \gamma(t - t_0) \equiv \omega(t)} \Rightarrow \tag{18}$$

$$s(t) = r\theta_0 + r\omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}r\gamma(t - t_0)^2 \tag{19}$$

Pero la longitud de arco $s(t)$ en realidad es $s = r\theta(t)$, queda:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\gamma(t - t_0)^2} \tag{20}$$

Comentarios

Rehaga en cilíndricas y esféricas

En cilíndricas es relativamente fácil, a las coordenadas polares se le agrega $\hat{z}$.

En esféricas hay que deducir todo nuevamente:

$$\hat{r} = \cos\phi \mathrm{sen}\theta \hat{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\phi \mathrm{sen}\theta \hat{\mathrm{j}} + \cos\theta \hat{\mathrm{k}} \tag{21}$$

$$\hat{\theta} = \cos\phi \cos\theta \hat{i} + \mathrm{sen}\phi \cos\theta \hat{\mathrm{j}} - \mathrm{sen}\theta \hat{\mathrm{k}} \tag{22}$$

$$\hat{\phi} = -\mathrm{sen}\phi \hat{\mathrm{i}} + \cos\phi \hat{\mathrm{j}} \tag{23}$$

ojo que el ángulo polar es ϕ y no θ como antes.