Mecánica Clásica - Primer cuatrimestre de 2021

Guía 6: *Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas. Hamilton–Jacobi.*

1. Escribir el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton de:

   (a) Un oscilador armónico unidimensional. Graficar el retrato de fase.

   (b) Un péndulo plano de longitud l y masa m en un campo gravitatorio g. Graficar el retrato de fase. Hallar los puntos de equilibrio y clasificarlos según su estabilidad; encontrar la ecuación de la curva separatriz entre la región de libración y la de rotación.

   (c) Una partícula en un potencial central $V(r)$, en coordenadas esféricas (r, θ, φ). Hallar constantes de movimiento.

   (d) Una partícula en un plano y con un potencial central $V(r)$, en coordenadas polares (r, φ). En especial, considerar los potenciales $V(r) = -k/r$ y $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ $(k > 0)$. Graficar los retratos de fase para las variables r y p_r y clasificar las órbitas posibles.

   (e) Un trompo simétrico, fijo por un punto en su eje de simetría, en un campo gravitatorio uniforme, usando los ángulos de Euler. Hallar constantes de movimiento. Graficar el retrato de fase para las variables θ y p_θ. Dada la variedad de movimientos posibles, analice casos particulares sencillos, por ejemplo: $p_\varphi = p_\psi$, $p_\varphi = 0$.

2. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas cilíndricas y esféricas. Construya los correspondientes diagramas de fases.

3. Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano igual a la energía total?

4. Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V = \frac{1}{r}(1 + \dot{r}^2)$, donde r es la distancia al origen. Encuentre los momentos generalizados p_r y p_θ, y el hamiltoniano. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva H? ¿Es $H = E$? Reduzca el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

5. (a) Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$ en la dirección $\hat{z}$. Tome $\mathbf{A} = Bx\,\hat{y}$. Recuerde que el potencial generalizado es $V = -(e/c)\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$.

   (b) Resuelva de nuevo el problema eligiendo ahora $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$.

   (c) Demuestre que la siguiente transformación es canónica y úsela para encontrar una solución alternativa:

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2), \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2), \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2),$$

donde $\omega = eB/mc$.

6. Un sistema consiste en dos masas puntuales m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{\text{cm}} + H_{\text{rel}}$, con

$$H_{\text{cm}} = \frac{P_{\text{cm}}^2}{2M} \qquad H_{\text{rel}} = \frac{p_{\text{rel}}^2}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

donde: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, $\mathbf{L}$ es el momento angular total y p_{rel} es el momento canónicamente conjugado de r.

7. Pruebe que si se hace una transformación canónica de (q, p) a (Q, P) se tiene:

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}.$$

8. Muestre que la transformación $Q = \ln(\frac{\sin p}{q})$, $P = q\cot p$ es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$. Aplique la transformación al oscilador armónico. Encuentre al menos 4 libros que incluyan este ejercicio. Encuentre al menos un libro en donde esta transformación sea aplicada con algún provecho.

9. Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P, Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton:

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_y \sin\lambda}{m\omega} \qquad p_x = -m\omega Y \sin\lambda + P_x \cos\lambda$$
$$y = Y\cos\lambda + \frac{P_x \sin\lambda}{m\omega} \qquad p_y = -m\omega X \sin\lambda + P_y \cos\lambda.$$

Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y = p_y = 0$ en $t = 0$.

10. Demuestre las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo f, g y h funciones de p_i y q_i; $F(f)$ es una función de f y c es una constante.

$$\begin{cases} [f, c] = 0, \\ [f, f] = 0, \\ [f, F(f)] = 0, \\ [f, g] + [g, f] = 0, \\ [f + g, h] = [f, h] + [g, h]. \end{cases} \qquad \begin{cases} [fg, h] = f[g, h] + [f, h]g, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right], \\ [f, g^n] = n g^{n-1}[f, g], \\ [g, F(f)] = F'(f)[g, f]. \end{cases}$$

11. Mediante la identidad de Jacobi, muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.

12. (a) Para una partícula calcule explícitamente los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ con las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Además calcule $[L_i, L_j]$ y $[L_i, L^2]$.

    (b) Muestre que si dos componentes del momento angular se conservan, entonces se conserva el vector $\mathbf{L}$.

    (c) ¿Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente momentos canónicos? *Idem* para H y L_z.

    (d) ¿Pueden ser L_x y L_y simultáneamente momentos canónicos? *Idem* para L_x y L^2.

    (e) ¿Se modifica el elemento de volumen en el espacio de las fases en una transformación canónica?

13. Considere los siguientes puntos:

    (a) Demuestre que $\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$. ¿Qué obtiene para $f = q_i$ y $f = p_i$? Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea constante de movimiento es que $[f, H] = 0$.

    (b) Muestre que si una coordenada q_i es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de q_i. Observe que si f es una constante de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al Hamiltoniano. ¿Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?