Mecánica Clásica - primer cuatrimestre de 2021

Guía 7: *Ecuación de Hamilton–Jacobi. Variables de ángulo acción*

1. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x en el potencial $V = a\sec^2(x/l)$, donde a y l son constantes positivas y x puede moverse entre $\pm\frac{\pi}{2}l$. Resuelva la ecuación de H–J encontrando una expresión integral para S. Encuentre $x(t)$ utilizando S.

2. Considerar el sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1, q_2, $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema? Resuelva esta ecuación para encontrar la función principal de Hamilton S. Escriba la expresión integral para la función principal de Hamilton y las expresiones integrales que dan la órbita y la evolución temporal. ¿De qué sistema se trata?

3. Considere un movimiento unidimensional de una partícula de masa m y carga e sometida a una campo eléctrico uniforme dependiente del tiempo $E(t)$. Encuentre el hamiltoniano del sistema. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi? Muestre que la función principal de Hamilton puede escribirse como

$$S = \left(\int_0^t eE(t')dt'\right)x + \alpha x - \phi(t),$$

donde α es una constante y ϕ es una función del tiempo. Resuelva la ecuación para ϕ. De allí encuentre la posición y el momento canónico conjugado en función del tiempo.

4. Considere un oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω:
   (a) Halle su hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton, construya los diagramas de fases, halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad, discuta la existencia de movimientos de libración y rotación.
   (b) Halle la trasformación canónica de función generatriz $F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q, P) = \omega P$.
   (c) Muestre que (Q, P) son variables de ángulo–acción. Halle el área encerrada por las curvas de energía constante E en el espacio de fases, y muestre que la curva que corresponde a un P dado encierra un área $2\pi P$.
   (d) Halle la función generatriz de tipo $F_2(P, q)$ que genera la misma transformación canónica $(q, p) \to (Q, P)$. ¿Qué relación hay entre F_1 y F_2?

5. Demuestre que la función generatriz de la transformación canónica que lleva a variables de ángulo y acción es $F_2(q, J) = \int^q p(J, q')\,dq'$. Pruebe que esta función *no* es periódica como función de q, pero que $F_1(q, Q)$ *sí* lo es.

6. Considere el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2.$$

Resuelva el problema utilizando la técnica de Hamilton–Jacobi. Encuentre la órbita general de la solución de la ecuación de H–J. ¿Qué sistema físico podría corresponder a este problema? Resuelva este problema de otras tres maneras:

(a) Resolviendo las ecuaciones canónicas.

(b) Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente (A y B son constantes), resolviendo para Q_i y P_i y luego antitransformando.

(c) Por medio de variables de ángulo–acción.

7. Una partícula de masa m se mueve en el potencial $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(|x| - a)^2$

   (a) Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya diagramas de fases, considerando especialmente las curvas de fases próximas al origen.

   (b) Muestre que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, y en cada una se definen distintas variables de ángulo–acción. Halle la variable de acción en función de E en cada caso.

8. Escriba las variables de acción y ángulo para las rotaciones en un plano de una barra con un punto fijo, sometida a un potencial angular $V(\psi) = k|\psi|/\pi$ si $-\pi < \psi < \pi$ ($k > 0$), con $V(\psi)$ periódico, $V(\psi + 2\pi) = V(\psi)$.

9. Considere una partícula con hamiltoniano

$$H(r,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

   para cada uno de los siguientes casos: $V(r) = -\dfrac{k^2}{r}$ y $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.
   La partícula se mueve en la región $r > 0$.

   (a) Dibuje los retratos de fase, escriba las ecuaciones de las curvas separatrices y clasifique las regiones en las que se divide el espacio de fase de acuerdo al tipo de movimiento.

   (b) Para los movimientos de libración exprese a la variable de acción como función de la energía y halle la relación $\psi = \psi(r, J)$, donde ψ es la variable de ángulo. ¿Cuál es la frecuencia del movimiento?

   (c) Encuentre la energía de las trayectorias que satisfacen las relaciones $J = n\hbar$ y $l = k\hbar$ (con n, k números naturales y $\hbar$ constante).

10. Una partícula se mueve en el espacio bajo la acción de un potencial central $V(|r|)$.

    (a) Calcule las variables de acción para la parte angular del movimiento. ¿Cómo se expresa el módulo del momento angular como función de las mismas?

    (b) ¿Bajo qué condiciones el movimiento de la partícula será periódico? Demuestre explícitamente que para el problema de Kepler y para el oscilador armónico el movimiento *es* periódico pero que para un potencial de la forma $V = a/r^2$ no lo es. Obtenga la frecuencia de movimiento como función de la energía.

    (c) ¿Cuál es la energía de las órbitas definidas por las relaciones $J_i = n_i\hbar$? ¿Cuánto vale el momento angular de las mismas? (n_i entero y $\hbar$ constante).

11. Para el potencial $V(q) = \epsilon(1 - \alpha/q)^2$

(a) Dibujar el diagrama de fases indicando las zonas de libración.

(b) Calcular las variables de ángulo y acción $J = J(E)$ y $\psi = \psi(q, J)$.

(c) ¿Qué pasa con el período del movimiento cuando la energía tiende al valor que corresponde a la curva separatriz?