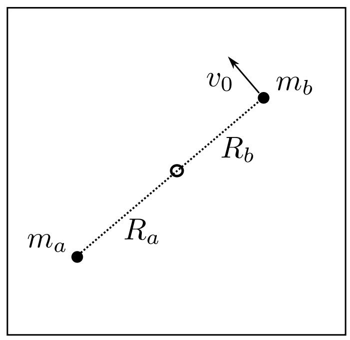
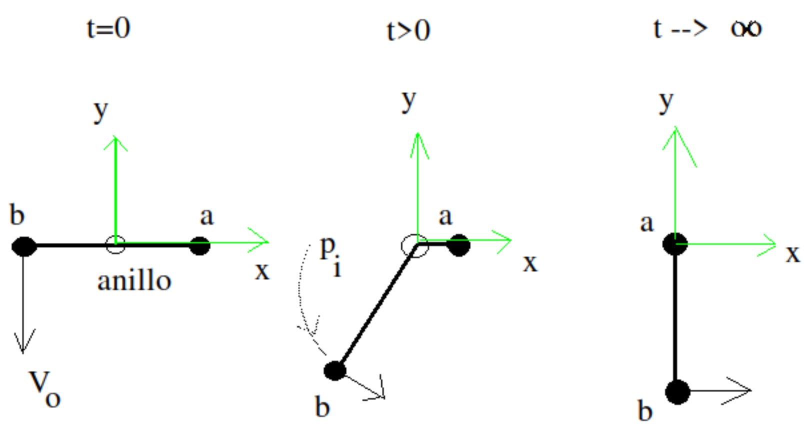
Guía 0: Ecuaciones de Newton. Fuerzas de vínculo. Leyes de conservación. Coordenadas curvilíneas.

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 8: Dos partículas de masas m_a y m_b están sobre una mesa horizontal sin fricción, unidas por una cuerda tensa que pasa por un anillo pequeño, sin fricción, fijo a la mesa. Inicialmente las partículas están quietas, a distancias R_a y R_b del anillo. En $t = 0$, la masa m_b recibe un impulso perpendicular a la cuerda y adquiere una velocidad v_0.
a) ¿Qué magnitudes se conservan?
b) Dar las velocidades de las partículas en función de su distancia al anillo.
c) Hallar la tensión de la cuerda en función de la distancia de una masa al anillo.



Solución: La situación se puede esquematizar de la siguiente manera:



Como punto de partida, hacemos las siguientes suposiciones:

- soga ideal
- el anillo está fijo y sólo transmite movimiento

- movimiento horizontal

Dicho esto, según el sistema de referencias elegido tenemos que:

$$\vec{r}_a(t=0) = R_a\hat{x} \qquad \vec{v}_a(t=0) = \vec{0} \tag{1}$$

$$\vec{r}_b(t=0) = -R_b\hat{x} \qquad \vec{v}_b(t=0) = -v_0\hat{y} \tag{2}$$

Veamos cuáles son las **magnitudes conservadas**:

<u>Cantidad de movimiento: **no se conserva**</u>

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{sist} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{N}_a + \vec{P}_a + \vec{N}_b + \vec{P}_b + \vec{T}_a + \vec{T}_b + \vec{F}_v \neq 0 \tag{3}$$

La única que no se compensa con ninguna fuerza es la de vínculo que es la fuerza de contacto entre la soga y el anillo el cual se encuentra fijo en un punto.

<u>Momento angular: **se conserva**</u>

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{sist} = \sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_{N_a} + \vec{\tau}_{P_a} + \vec{\tau}_{N_b} + \vec{\tau}_{P_b} + \vec{\tau}_{T_a} + \vec{\tau}_{T_b} + \vec{\tau}_{F_v} = 0 \tag{4}$$

Los torques de cada partícula entre su fuerza normal y peso se compensan mutuamente, los torques entre las sogas son colineales al desplazamiento y notar que el brazo de palanca de la fuerza de vínculo es siempre paralelo al desplazamiento $\vec{r}_b - \vec{r}_a$ en todo momento. Así que en este caso es independiente del punto de aplicación.

Ya que estamos notemos que $\vec{L}$ vale:

$$\boxed{\vec{L}^o_{sist} = m_b\ R_b\ V_0\ \hat{z}} \tag{5}$$

<u>Energía mecánica: **se conserva**</u>

En este caso el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = 0 \tag{6}$$

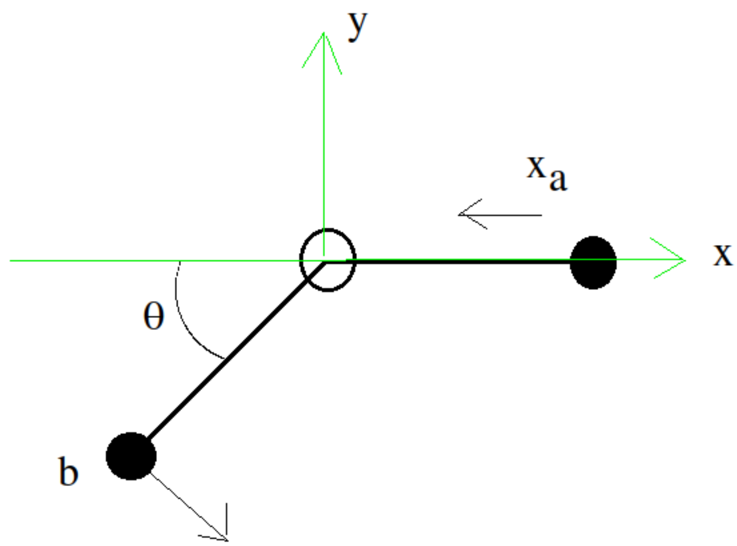
- Las fuezas normales de contacto son perpendiculares al movimiento.
- El trabajo de una tensión se anula con el de la otra.
- El anillo está fijo en el espacio, de manera que la fuerza de vínculo no genera desplazamiento

Por lo tanto tenemos que:

$$E_o = \frac{1}{2}m_B(\dot{r}_b^2 + r_b^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_a\dot{x}_a^2 = \frac{1}{2}m_bV_0^2 \tag{7}$$

Ahora hay que repetir este mismo análisis para las partículas por separado.

b) De la manera que quedó escrita la energía no es directo obtener la velocidad de cada partícula. Tenemos que analizar los vínculos.



$$\vec{r}_a = x_a \hat{x} \tag{8}$$

$$\vec{r}_b = -r_b \cos\theta \hat{x} - r_b \mathrm{sen}\theta \hat{\mathrm{y}} \tag{9}$$

Del hecho que la soga es inextensible:

$$|\dot{\vec{r}}_a| = |\dot{\vec{r}}_b| \tag{10}$$

En polares:

$$r_a \hat{r} = -r_b \hat{r} \Rightarrow |\dot{x}_a| = \dot{r}_b| \tag{11}$$

Otra relación sale de la conservación del momento angular:

$$\vec{L} = m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a + m_b \vec{r}_b \times \vec{v}_b = m_b r_b^2 \dot{\theta} \hat{z} = L_z \hat{z} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{L_z}{m_b r_b^2}} \tag{12}$$

A partir de la conservación de la energía, ahí sale:

$$E_o = \frac{1}{2}(m_a + m_b)\dot{r}_b^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{m_b r_b^2} \tag{13}$$

queda reducido a un problema unidimensional:

$$|\dot{r}_b| = \sqrt{\frac{2}{m_a + m_b}\left(\frac{1}{2}m_0 v_0^2 - \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{m_b r_b^2}\right)} \equiv \sqrt{\frac{2}{M}(E_o - V_{eff})} \tag{14}$$

Recomiendo analizar el gráfico de V_{eff} vs x

c) A partir del valor de $\dot{r}_b$, se deriva y multiplica por m.