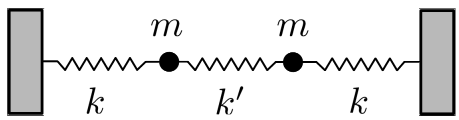
Guía 1: Coordenadas generalizadas. Grados de libertad. Lagrange.

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 1: Se tiene el sistema de la figura, donde x_1, x_2 se miden a partir de las posiciones de equilibrio. Sea $q_1 = x_1 + x_2$ y $q_2 = x_1 - x_2$.
a) ¿Definen (q_1, q_2) un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?.
b) Si $q_1 = 0$, describa cualitativamente el movimiento de cada partícula. Idem si $q_2 = 0$.
c) Calcular las fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2.



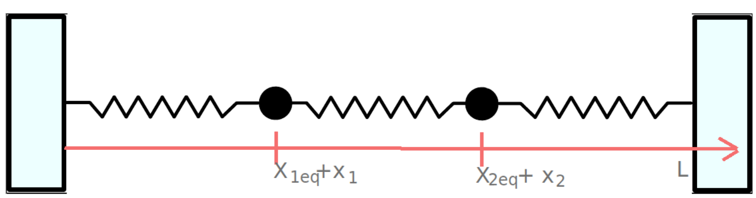
Solución:
a) Es un problema unidimensional, por lo que tiene dos grados de libertad. Esto se puede calcular de la relación:

$$S = 3N - K \tag{1}$$

donde N es el número de partículas, K el número de vínculos y S el número de grados de libertad. Dado que cada partícula tiene dos vínculos por ser unidimensional, quiere decir que $S = 2$.
Se usa una coordenada por cada grado de libertad. En este caso x_1, x_2. Para que q_1, q_2 sea un conjunto admisible de coordenadas deben describir el problema equivalente en forma mas sencilla desacoplando las ecuaciones de movimiento constituyendo un conjunto linealmente independiente.

$\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha(x_1 + x_2) + \beta(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)x_1 + (\alpha - \beta)x_2 = 0, \quad \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

b) Primero hay que obtener las ecuaciones de movimiento. Lo vamos a resolver de tres maneras distintas:



Forma 1: Utilizando las ecuaciones de Newton:

$m_1\ddot{x_1} = -k(x_{1,eq} + x_1 - \ell_0) + k'(x_{2,eq} + x_2 - x_{1,eq} - x_1 - \ell'_0)$

$m_1\ddot{x_1} = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) - k(x_{1,eq} - \ell_0) + k'(x_{2,eq} - x_{1,eq} - \ell'_0)$

Si $\ddot{x_1}|_{x_{1,eq}} = 0 \quad \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow k(x_{1,eq} - \ell_0) = k'(x_{2,eq} - x_{1,eq} - \ell'_0)$

Entonces

$$m_1\ddot{x_1} = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \tag{2}$$

Analogamente:

$m_2\ddot{x}_2 = -k(L - x_{2,eq} - x_2 - \ell_0) - k'(x_{2,eq} + x_2 - -x_{1,eq} - x_1 - \ell_0')$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_2 - x_1) \\ \\ m_2\ddot{x}_2 = -kx_2 + k'(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{3}$$

Si se suman ambas ecuaciones miembro a miembro, los términos en "azul" se cancelan pues corresponden a fuerzas internas si pensamos a las dos partículas como parte de un mismo sistema.

$$\text{Usando el cambio de variables :} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ \\ x_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) \end{cases} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = -k(q_1 - q_2) - k'(-2q_2) \\ \\ m_2(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = -k(q_1 + q_2) + k'(-2q_2) \end{cases} \tag{5}$$

Sumando y restando, en el caso $m_1 = m_2 \equiv m$:

$$m\ddot{q}_1 = kq_1 \tag{6}$$

$$m\ddot{q}_2 = (k + 2k')q_2 \tag{7}$$

Proponiendo soluciones de tipo oscilador armónico se tienen dos frecuencias:

$$\omega_1 = \frac{k}{m} \tag{8}$$

$$\omega_2 = \frac{k + 2k'}{m} \tag{9}$$

Si $q_1 = 0$ queda $x_1 = -x_2$, se tienen modos en contrafase con frecuencia ω_2
Si $q_2 = 0$ queda $x_1 = x_2$, se tienen modos en fase con frecuencia ω_1

Forma 2: Usando el principio de los *Trabajos Virtuales:*.

Haber tomado el equilibrio según la **Forma 1** es equivalente a eliminar todos los vínculos.

$$[m_1\ddot{x}_1 + kx_1 - k'(x_2 - x_1)]\delta x_1 + [m_2\ddot{x}_2 + kx_2 + k'(x_2 - x_1)]\delta x_2 = 0 \tag{10}$$

Si se hace el cambio de variables y reagrupa los términos queda:

$$[m_1\ddot{q}_1 + kq_1]\delta q_1 + [m_2\ddot{q}_2 + kq_2 + 2k'q_2]\delta q_2 = 0 \tag{11}$$

Dado que es un sistema linealmente independiente reobtenemos la solución correspondiente a las ecuaciones [6] y [7].

Forma 3: Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

Para resolverlo de esta manera es necesario escribir explicitamente la energía cinética y la potencial elástica del sistema.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \quad ; \qquad V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 \tag{12}$$

Con esto podemos construir el lagrangiano $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 \tag{13}$$

Reescrito en términos de las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 queda:

$$L = \frac{1}{2}m\left[\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2\right] - \frac{1}{2}k\left[\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2\right] - \frac{1}{2}k'q_2^2 \tag{14}$$

Una vez obtenido el lagrangiano en la forma deseada se pueden escribir las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{15}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}m\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}kq_1 = 0 \\ \\ \frac{1}{2}m\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}kq_2 + k'q_2 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Como debe ser se reobienen las ecuaciones [6] y [7].

c) La fuerza generalizada es de la forma: $Q_i = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$ y queda una fuerza independiente de la coordenada q_i

$$Q_i = F_i\frac{\partial x_1}{q_1} + F_i\frac{\partial x_2}{q_2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{17}$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}m\ddot{q}_1^2 = -\frac{1}{2}kq_1 \tag{18}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}m\ddot{q}_2^2 = -\frac{1}{2}(k + 2k')q_2 \tag{19}$$