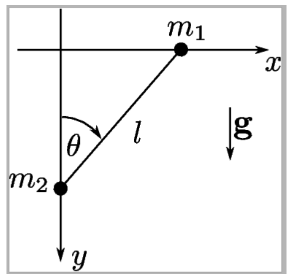
Guía 1: Coordenadas generalizadas. Grados de libertad. Lagrange.

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 5: Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo inextensible de longitud l; m_1 se mueve sólo sobre el eje x y m_2 sólo sobre el y. Las condiciones iniciales son las que indica la figura.



a) Halle la ecuación de movimiento para θ utilizando el PTV.
b) Halle la ecuación de Lagrange para θ.
c) Si $m_1 = m_2 \equiv m$, halle la tensión T en el hilo como función de θ.
d) ¿Cuál es el período de movimiento en este caso? Suponga que θ sólo puede tomar valores pequeños.

Solución:

a) Si el sistema se encuentra en equilibrio, tenemos que:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{1}$$

Podemos descomponer las fuerzas entre las aplicadas y las de vínculo:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{f}_i^v \tag{2}$$

El trabajo de las fuerzas de vínculo su trabajo es nulo en general, pero no así las fuerzas aplicadas.

Si $\vec{F}_i^a = \dot{\vec{p}}_i$ podemos hacer lo siguiente:

$$\sum(\vec{F}_i^a - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{3}$$

De acuerdo al sistema de referencias elegido:

$$(m_1 g\hat{y} - m_1\ddot{x}_i\hat{x} - m_1\ddot{y}_i\hat{y}) \cdot (\delta x_1\hat{x} + \delta y_1\hat{y}) + (m_2 g\hat{y} - m_2\ddot{x}_i\hat{x} - m_2\ddot{y}_i\hat{y}) \cdot (\delta x_2\hat{x} + \delta y_2\hat{y}) = 0 \tag{4}$$

$$\boxed{(m_1 g - m_1\ddot{y}_1)\delta y_1 - m_1\ddot{x}_1\delta x_1 + (m_2 g - m_2\ddot{y}_2)\delta y_2 - m_2\ddot{x}_2\delta x_2 = 0} \tag{5}$$

Tenemos tres vínculos:

$$\delta y_1 = 0 \tag{6}$$

$$\delta x_2 = 0 \tag{7}$$

$$x_1^2 + y_2^2 = \ell^2 \Rightarrow \boxed{x_1\delta x_1 + y_2\delta y_2 = 0} \tag{8}$$

Como tenemos dos partículas, tres vínculos, se tiene un grado de libertad.

La variable que utilizaremos es θ.

$$x_1 = \ell \text{sen}\theta \Rightarrow \delta \text{x}_1 = \ell \cos\theta \delta\theta \tag{9}$$

$$y_2 = \ell \cos\theta \Rightarrow \delta y_2 = -\ell \text{sen}\theta \delta\theta \tag{10}$$

$$\dot{x}_1 = \ell \dot{\theta} \cos\theta \Rightarrow \ddot{x}_1 = \ell \ddot{\theta} \cos\theta - \ell \dot{\theta}^2 \text{sen}\theta \tag{11}$$

$$\dot{y}_2 = -\ell \dot{\theta} \text{sen}\theta \Rightarrow \ddot{\text{y}}_2 = -\ell \ddot{\theta} \text{sen}\theta - \ell \dot{\theta}^2 \cos\theta \tag{12}$$

Con este cambio de variable la última condición de vínculo recuadrada se satisface inmediatamente.

Metemos todo en la ecuación 5 y queda una expresión para la ecuación de movimiento:

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{\dot{\theta}^2 (m_2 - m_1) \ell \text{sen}\theta \cos\theta}{\ell (m_1 \cos^2\theta + m_2 \text{sen}^2\theta)} + \frac{m_2 g \ell \text{sen}\theta}{\ell^2 (m_1 \cos^2\theta + m_2 \text{sen}^2\theta)} = 0} \tag{13}$$

b) Ahora, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \ell^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \qquad V_1 = 0 \tag{14}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \ell^2 \dot{\theta}^2 \text{sen}^2\theta \qquad \text{V}_2 = -\text{m}_2 \text{g} \ell \cos\theta \tag{15}$$

Componemos el lagrangiano L:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 (m_1 \cos^2\theta + m_2 \text{sen}^2\theta) + \text{m}_2 \text{g} \ell \cos\theta \tag{16}$$

Se plantea:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{17}$$

Trabajando las expresiones se llega al mismo resultado de la ecuación 13.
c) Al igualar las masas la ecuación 13 se simplifica notablemente:

$$\ddot{\theta} - \frac{\dot{\theta}^2 (m_2 - m_1) \ell \text{sen}\theta \cos\theta}{\ell (m_1 \cos^2\theta + m_2 \text{sen}^2\theta)} + \frac{m_2 g \ell \text{sen}\theta}{\ell^2 (m_1 \cos^2\theta + m_2 \text{sen}^2\theta)} = 0 \tag{18}$$

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{\ell} \text{sen}\theta = 0 \tag{19}$$

Haciendo la aproximación habitual de ángulos pequeños $\theta << 1$:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{20}$$

y de ahí sale el período.