Guía 1: Coordenadas generalizadas. Grados de libertad. Lagrange.

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

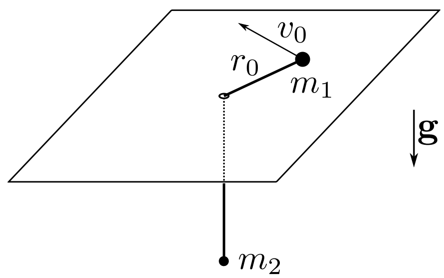
Problema 6: Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo de longitud L, como indica la figura. La masa m_1 se mueve en el plano de la mesa y m_2 sólo verticalmente. En $t = 0$, m_1 se encuentra a una distancia $r_0 < L$ del orificio y se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.

a) Escriba las ecuaciones de Lagrange y halle sus integrales primeras en términos de las condiciones iniciales.

b) Halle la tensión del hilo.

c) Repita (a) y (b), pero ahora la masa m_2 puede moverse en las dos direcciones de un plano horizontal.

d) Repita (a) y (b), pero ahora la masa m_2 puede moverse en las dos direcciones de un plano vertical.



Solución:

a) Lo primero veamos los grados de libertad del sistema:
La partícula 1 se mueve en el plano, es decir tiene un vínculo geométrico. La partícula 2 le impondremos solo movimiento vertical, con lo que tiene dos vínculos. Entre las partículas tenemos el vínculo dado por la soga.

Es decir: $N = 2$, $k = 4$, entonces $S = 2$

Las coordenadas generalizadas que usaremos son r_1 que será la coordenada desde el orificio que tomaremos como origen y la posición de la partícula 1 y su coordenada angular θ_1, de esta manera queda un problema basicamente en cilíndricas. Así que vamos primero por la energía cinética:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2) \qquad T_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{r}_1^2 \tag{1}$$

Recordar que si el largo de la soga es ℓ, entonces $r_2 = z - r_1$
Mientras que el potencial es

$$V = -m_2 g(\ell - r_1) \tag{2}$$

Construir el lagrangiano es inmediato, pues $L = T - V$, vamos a buscar las integrales primeras calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{r}_1 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_1} = m_1 r_1 \dot{\theta}_1^{\,2} - m_2 g \tag{4}$$

Por lo que

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ddot{r}_1 - m_1 r_1 \dot{\theta}_1^{\,2} + m_2 g = 0} \tag{5}$$

Hago lo mismo pero con θ_1:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \tag{6}$$

Notemos que:

$\dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$ esto quiere decir que θ_1 es cíclica y $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = p_\theta = cte$ y a la vez $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 r_1^2 \dot{\theta}_1 = p_\theta = \ell_z$, se puede corroborar facilmente que es el momento angular.

Las ecuaciones de movimiento quedan:

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ddot{r}_1 - m_1 r_1 \dot{\theta}_1^{\,2} + m_2 g = 0} \tag{7}$$

$$\boxed{r_1 \ddot{\theta}_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 = 0} \tag{8}$$

La última ecuación tiene como integral primera:

$$\frac{d}{d\theta_1}\left(\frac{1}{2} r_1 \dot{\theta}_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1^2\right) = 0 \tag{9}$$

pero la interesante es la ecuación de la integral primera en r_1 (que por simplicidad sigue como r) reescrita en términos de la cantidad conservada ℓ_z:

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - \frac{\ell_z^2}{m_1 r^3} + m_2 g = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell_z^2}{m_1 r^2} + m_2 g r\right\} = 0 \tag{10}$$

Es decir, la ecuación de la integral primera es la energía:

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell_z^2}{m_1 r^2} + m_2 g r} \tag{11}$$

Notar que $\ddot{r} = \dfrac{d\dot{r}}{dt} = \dfrac{d\dot{r}}{dr}\dot{r} = \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{2}\dot{r}^2\right)$

b) La tensión sale rápido:

$$m_2 \ddot{r} = m_2 g - T \tag{12}$$

Se despeja de la ecuación 7 la aceleración y se reemplaza en esta ecuación.

Analice tanto el potencial efectivo como el punto de equilibrio tal que la tensión es nula.

c) El problema ahora se vuelve mas tedioso para escribir las coordenadas y tenemos un grado mas de libertad.

En este caso las coordenadas para la partícula 1 es la misma que antes, cambia para la partícula 2 son:

$$x_2 = (\ell - r_1)\ \cos\varphi\ \mathrm{sen}\theta_2$$
$$y_2 = (\ell - r_1)\ \mathrm{sen}\varphi\ \mathrm{sen}\theta_2$$
$$z_2 = -(\ell - r_1)\ \cos\theta_2$$

Ahora obtener el lagrangiano es un tanto mas laborioso y requiere de paciencia:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r_1\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + (\ell - r)^2\dot{\varphi}^2\mathrm{sen}^2\theta_2 + (\ell - \mathrm{r})^2\dot{\theta}_2^2] - \mathrm{m_2 g}(\ell - \mathrm{r})\cos\theta_2} \tag{13}$$

Las coordenadas cíclicas ahora son θ_1 (como antes) y φ

$$p_{\theta_1} = m_1 r^2 \dot{\theta}_1 \tag{14}$$

$$p_{\varphi} = m_2(\ell - r)^2 \dot{\varphi} \, \mathrm{sen}^2\theta_2 \tag{15}$$

Queda repetir lo hecho antes para obtener las integrales primeras.

d) Este punto que agrego es del problema original de la guía, queda un problema interesante porque debe describir las oscilaciones en el plano vertical.