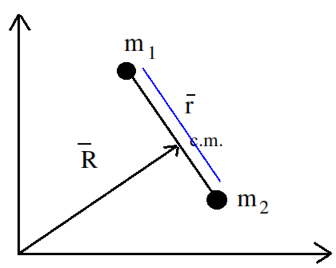
Guía 3: *Fuerzas centrales y dispersión*

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 1: Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias. El período del movimiento es τ. Este movimiento es detenido súbitamente; luego las partículas caen una hacia la otra. Discuta por qué. Sin resolver ninguna integral, demuestre que chocan después de un tiempo $\tau/4\sqrt{2}$.

Solución:
El sistema se puede visualizar de la siguiente manera:



defino $\vec{r} = \vec{r'}_2 - \vec{r'}_1$ (las coordenadas primadas medidas desde el centro de masa).

De esta manera el lagrangiano queda:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{r'}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r'}_2^2 - V(r) \equiv \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + L' \tag{1}$$

se puede ver como que el sistema es aislado y el sistema de centro de masa es inercial, o bien se puede tomar R como coordenada cíclica y considerar directamente el lagrangiano L', reescribimos las coordenadas primadas en términos de la coordenada r:

$$m_1\vec{r'}_1 + m_2\vec{r'}_2 = 0 \tag{2}$$

Trabajando un poco las expresiones se llega a:

$$\vec{r'}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{3}$$

$$\vec{r'}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{4}$$

La velocidad se obtiene de manera directa y el lagrangiano L' queda:

$$L' = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{r'_1}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{r'_2}}\right)^2 - V(|\vec{r}|) = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - V(|\vec{r}|) \tag{5}$$

$$L' = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - V(|\vec{r}|) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 - V(|\vec{r}|) \tag{6}$$

Es el problema de una masa equivalente μ moviéndose alrededor del centro de masa. En cilíndricas:

$$\boxed{L' = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2 - V(r)} \tag{7}$$

En este caso, θ es cíclica y tenemos que :

$$p_\theta = \mu r^2\dot{\theta} \tag{8}$$

Entonces la ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada r queda:

$$\mu\ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \tag{9}$$

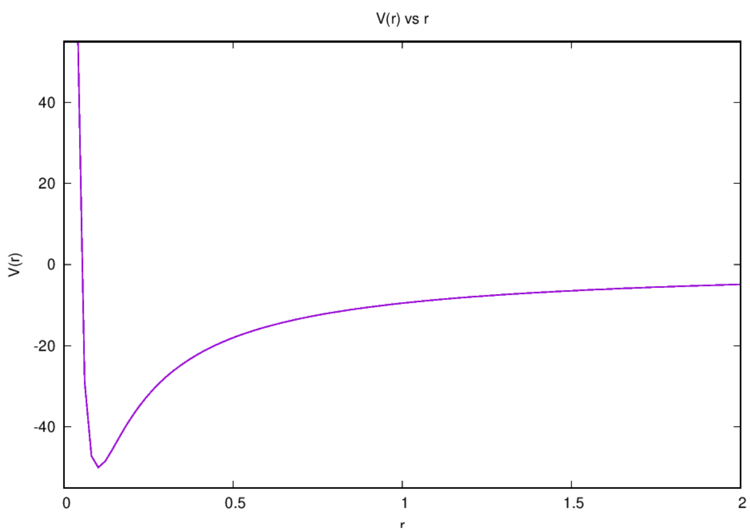
Y se puede escribir como una integral primera obteniendo:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{\mu r^2} + V(r) \tag{10}$$

Lo que me define un potencial efectivo:

$$V_{eff} = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{\mu r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r} \tag{11}$$

Cuyo gráfico es:



Podemos llamar a la posición del mínimo de potencial r_o, el cual se puede calcular como:

$$\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r_o} = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{p_\theta^2}{\mu r_o^3} + \frac{Gm_1m_2}{r_o^2} \Rightarrow \boxed{r_o = \frac{p_\theta^2}{Gm_1m_2\mu}} \tag{12}$$

Si $\dot{\theta} = cte \equiv \omega$, entonces $\omega = 2\pi/\tau$ se llega al caso circular de la Tercera ley de Kepler:

$$\boxed{r_o^3 = \frac{Gm_1m_2}{4\pi^2\mu}\tau^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2}\tau^2} \tag{13}$$

En el caso exótico que se detenga súbitamente, aunque no se conserve el impulso angular, si se conserva la energía:

$$-\frac{Gm_1m_2}{r_o} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \tag{14}$$

De esta expresión se puede despejar $\dot{r}$ y a partir de tomar que $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$ integrando se obtiene el tiempo de vuelo hasta el choque:

$$\int_0^T dt = \pm \int_{r_0}^0 \frac{dr}{\sqrt{2G(m_1+m_2)(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0})}} \tag{15}$$

Para integrar puede ser útil los siguientes cambios de variables: $u^2 = \dfrac{1}{r}$, $u_0^2 = \dfrac{1}{r_o}$ y finalmente usando la tercera ley de Kepler se llega al resultado escrito en el enunciado.