Guía 3: *Fuerzas centrales y dispersión*

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 2: El potencial de un oscilador isótropo es $V = kr^2/2$.
a) Dibuje el potencial efectivo para un caso general.
b) Discuta los movimientos posibles en función del valor del momento angular y las condiciones iniciales.
c) Encuentre la ecuación de la órbita $r(\varphi)$ y de la trayectoria $r(t)$ y $\varphi(t)$ en función de las condiciones iniciales (usted decide cuál es el instante inicial). ¿Cuál es el período del movimiento radial? ¿Cuál es el período del movimiento angular? ¿Cuál es el período del movimiento en el espacio?
d) Encuentre el período para el caso en que la órbita es circular y describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la órbita circular.

Solución:
En coordenadas polares es similar al problema 1.

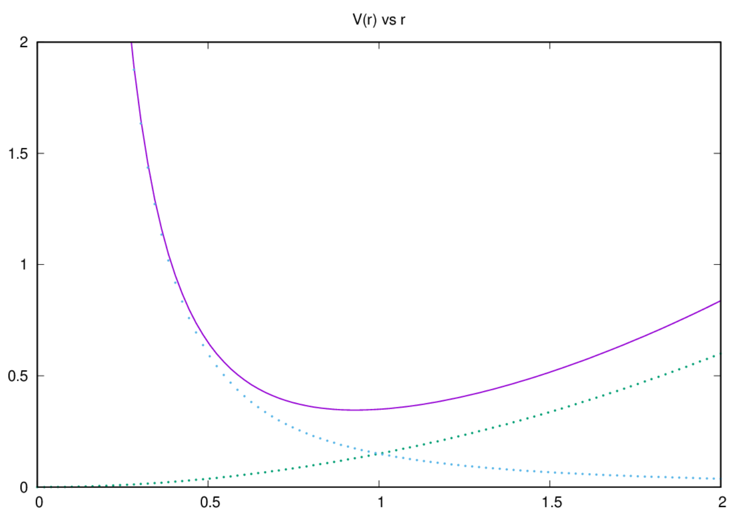
$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}kr^2 \tag{1}$$

Dado que φ es cíclica, se puede definir: $\boxed{\ell_2 = mr^2\dot{\varphi}}$.
También se puede llegar relativamente rápido que:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell_z^2}{mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \tag{2}$$

Cuyo potencial efectivo es:

$$V_{eff} = \frac{1}{2}\frac{\ell_z^2}{mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \tag{3}$$

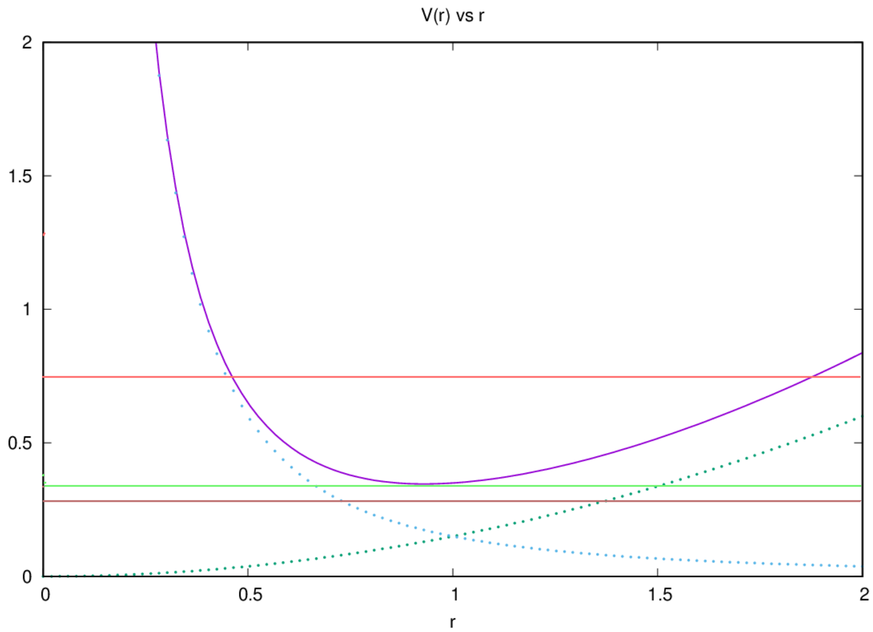


En este gráfico en líneas punteadas la contribución de cada término al potencial, se eligió de manera arbitraria el mínimo cercano a $r = 1$, pero mejor generalizarlo y decir que está en $r = r_0$

Se puede calcular:

$$\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r_o} = 0 \Rightarrow r_o^4 = \frac{\ell_z^2}{mk} \tag{4}$$

b) Del gráfico del potencial, se ven tres regímenes posibles:



$E < V(r_0)$
En este caso no hay movimiento posible (línea marrón)

$E = V(r_0)$
Sólo tenemos órbitas circulares (línea verde).

$E > V(r_0)$
existen órbitas acotadas pero no necesariamente cerradas (línea roja).

c)

Para obtener $r(t)$, despejar $\dot{r}$ de la expresión de la energía e integrar.

Para obtener $\varphi(t)$, una vez obtenida $r(t)$, reemplazar en el momento ℓ_z e integrar.

Para obtener $r(\varphi)$, note que $\quad d\varphi = \frac{\ell_z^2}{mr^2}dt = \frac{\ell_z^2}{mr^2}\frac{dr}{\dot{r}}$ y se despeja $\dot{r}$ de la expresión de la energía.

d) El caso de órbitas circulares es cuando $\dot{r} = 0$, es decir cuando $E_o = V_{eff}(r_o)$, como es lógico pasa cuando $r = r_o$.

Si consideramos un apartamiento de esta situación de equilibrio tenemos que:

$r = r_0 + \delta r$

Se puede hacer un desarrollo a orden dos alrededor del equilibrio:

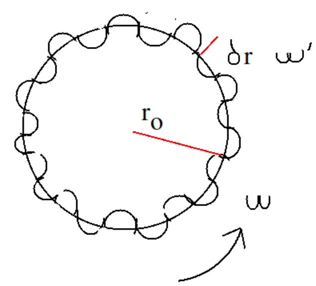
$$V_{eff} = V_{eff}(r_o) + \frac{dV_{eff}(r_o)}{dr}(r - r_o) + \frac{1}{2}\frac{d^2V_{eff}(r_o)}{dr^2}(r - r_o)^2 \tag{5}$$

Reemplazando:

$$V_{eff} = E_o + 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{3\ell_z^2}{mr_o^4} + k\right)\delta r^2 = E_o + 2k\delta r^2 = E_o + m\omega'\delta r^2 \tag{6}$$

En este último cambio suponemos se comporta como un oscilador armónico; donde $\omega' = \sqrt{\frac{k'}{m}}$ con $k' = 4k$

Esta es la frecuencia en la que se aparta una distancia δr de la órbita circular.



Se puede escribir este desplazamiento como:

$$r - r_0 = \eta = \delta r \cos(\omega' t + \phi) \tag{7}$$

De esta manera la energía se puede reescribir en términos de estos desplazamientos alrededor de r_o:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_0 + \frac{1}{2}k'(r - r_o)^2 = \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + V_0 + \frac{1}{2}k'\eta^2 \tag{8}$$

Queda así la energía del apartamiento:

$$E' = \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}k'\eta^2 \tag{9}$$