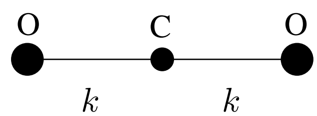
Guía 4: *Pequeñas oscilaiones*

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 1: Obtener los modos normales de oscilación colineales para la molécula de CO_2, interpretando físicamente cada uno de ellos. Escriba la solución general. Hallar las coordenadas normales utilizando argumentos de simetría.



Solución:
Lo primero que hacemos es escribir la posición de las partículas como apartamientos de sus posiciones de equilibrio. Tomando como origen de coordenadas el carbono y el eje "x" positivo a la derecha y se obtiene sus velocidades de manera directa:

$x_1 = \eta_1 - \ell \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\eta}_1$
$x_2 = \eta_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\eta}_2$
$x_3 = \eta_3 + \ell \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\eta}_3$

Como siempre para escribir el lagrangiano necesitamos tanto la energía cinética como la potencial:

$$T = \frac{1}{2} m_O (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2} m_C \dot{\eta}_2^2 \tag{1}$$

$$V = \frac{1}{2} k \left[\sqrt{(x_1 - x_2)^2} - \ell \right]^2 + \frac{1}{2} k \left[\sqrt{(x_3 - x_2)^2} - \ell \right]^2 \tag{2}$$

se trabaja la expresión:

$$V = \frac{1}{2} k \left[\ell \sqrt{\left(1 + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\ell}\right)^2} - \ell \right]^2 + \frac{1}{2} k \left[\ell \sqrt{\left(1 + \frac{\eta_3 - \eta_2}{\ell}\right)^2} - \ell \right]^2 \tag{3}$$

$$V \approx \frac{1}{2} k \left[\ell + \eta_1 - \eta_2 - \ell \right]^2 + \frac{1}{2} k \left[\ell + \eta_3 - \eta_2 - \ell \right]^2 = \frac{1}{2} (\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3) \tag{4}$$

Escritos en forma matricial:

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_O & 0 & 0 \\ 0 & m_C & 0 \\ 0 & 0 & m_0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbb{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \tag{6}$$

con esto buscamos las autofrecuencias:

$$det(\mathbb{V} - \lambda \mathbb{T}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k - \lambda m_o & -k & 0 \\ -k & 2k - \lambda m_C & -k \\ 0 & -k & k - \lambda m_o \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

cuyo resultado es el siguiente polinomio característico:

$$\lambda(k - \lambda m_o)[\lambda m_o m_C - k(m_C + 2m_o)] = 0 \tag{8}$$

que da las siguientes autofrecuencias:

$$\boxed{\omega_1^2 = 0} \qquad \boxed{\omega_2^2 = \frac{k}{m_o}} \qquad \boxed{\omega_3^2 = \frac{(m_c + 2m_o)k}{m_o m_C}} \tag{9}$$

Ahora buscar los modos normales es resolver el problema de autovectores:

$\omega_1 = 0$:

$$\mathbb{V}\vec{a}_1 = 0 \Rightarrow k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \tag{10}$$

$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m_o}}$:

$$\left(\mathbb{V} - \frac{k}{m_o}\right)\vec{a}_a = 0 \Rightarrow k \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - m_c/m_o & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \tag{11}$$

$\omega_3 = \sqrt{\dfrac{k(m_c + 2m_o)}{m_o m_C}}$:

$$\left(\mathbb{V} - \frac{k(m_C + 2m_o)}{m_c m_o}\right)\vec{a}_3 = 0 \Rightarrow k \begin{pmatrix} 1 - \frac{m_C + 2m_o}{m_C} & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{m_C + 2m_o}{m_o} & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \frac{m_C + 2m_o}{m_C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\frac{m_o}{m_C} \\ 1 \end{pmatrix}} \tag{12}$$

Los argumentos de simetría se pueden ver de manera directa.

El paso siguiene es normalizar estos vectores, que se hace de la siguiente manera:

$$\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbb{T}\mathbb{A} = \mathbb{I} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\frac{m_o}{m_C} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_O & 0 & 0 \\ 0 & m_C & 0 \\ 0 & 0 & m_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\frac{m_o}{m_C} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m_0 + m_C & 0 & 0 \\ 0 & -2m_0\left(1 + \frac{m_o}{m_C}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2m_o \end{pmatrix} \tag{14}$$

Finalmente en término de los modos normales:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m_o + m_C}} & \frac{1}{\sqrt{2m_0(1 + 2m_o/m_C)}} & \frac{1}{\sqrt{2m_o}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m_o + m_C}} & -\sqrt{\frac{1}{2m_0}m_C + 2m_o} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2m_o + m_C}} & \frac{1}{\sqrt{2m_0(1 + 2m_o/m_C)}} & -\frac{1}{\sqrt{2m_o}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \cos\delta_1 \\ C_2 \cos\left[\left(\sqrt{\frac{k(m_C + 2m_o)}{m_o m_C}}\right) t + \delta_2\right] \\ C_3 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_o}} t + \delta_3\right) \end{pmatrix} \tag{15}$$