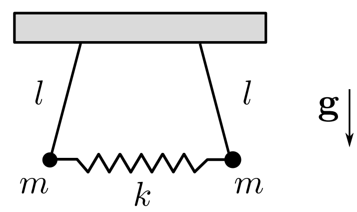
Guía 4: *Pequeñas oscilaiones*

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 3: Deducir las ecuaciones de movimiento de dos péndulos simples conectados por un resorte lineal sin masa, como se indica en la figura. Suponer que el movimiento ocurre en el plano del dibujo y calcular las frecuencias naturales de vibración para pequeños desplazamientos. Determinar a priori las coordenadas normales. Analizar el movimiento del sistema para la siguiente condición inicial: $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_2(0) = 0, \theta_1(0) = \theta_0, \theta_2(0) = 0$.



Solución:
Este problema requiere primero escribir las coordenadas desde la posición de equilibrio y no olvidar que el potencial debe desarrollarse a segundo orden. **Tomaremos el eje y vertical hacia abajo y el eje x positivo a la derecha.**

$x_1 = \ell \text{sen}\theta_1 \qquad y_1 = \ell\cos\theta_1 \qquad\qquad x_2 = \ell_0 + \ell\text{sen}\theta_2 \qquad y_2 = \ell\cos\theta_2$

Tomando:

$\theta_1 = 0 + \eta_1 \qquad \theta_2 = 0 + \eta_2 \qquad\qquad$ con $\eta_1 << 1$ y $\eta_2 << 1$

La energía cinética es:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2)} \tag{1}$$

Vamos a calcular ahora la energía potencial:

$$V = -mgy_1 - mgy_2 + \frac{1}{2}k\ell_0^2\left[\frac{1}{\ell_0}\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} - 1\right]^2 \tag{2}$$

Desarrollo y_1, para la otra partícula es igual:

$$-mgy_1 = -mg\ell\cos\theta_1 \approx -mg\ell(1-\eta_1^2/2) = -mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell\eta_1^2 \tag{3}$$

Desarrollo el radicando del potencial:

$$(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = \ell_0^2 + 2\ell\ell_0(\text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_1) + 2\ell^2 - 2\ell^2(\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2) \tag{4}$$

Siempre conviene desarrollar a un orden mas del que necesitamos:

$$(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 \approx \ell_0^2 + 2\ell\ell_0(\eta_2 - \eta_1 + \frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{3}) + 2\ell^2 - 2\ell^2(\eta_1\eta_2 + 1 - \frac{\eta_1^2}{2} - \frac{\eta_2^2}{2}) \tag{5}$$

El paso siguiente es tomar la raíz, extraer de factor común:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \approx \ell_0\left[1 + 2\frac{\ell}{\ell_0}(\eta_2-\eta_1) + \frac{2\ell}{\ell_0}\frac{\eta_2^3-\eta_1^3}{3} + 2\frac{\ell^2}{\ell_0^2}\eta_1\eta_2 - \frac{\ell^2}{\ell_0^2}(\eta_1^2+\eta_2^2)\right]^{1/2} \tag{6}$$

Se usa la identidad: $(1+\epsilon)^\alpha \approx 1+\alpha\epsilon$ usando que $\epsilon << 1$. Luego, se eleva al cuadrado y nos quedamos con el orden no nulo mas bajo:

$$\frac{1}{2}k\ell_0^2\left[\frac{\ell}{\ell_0}(\eta_2-\eta_1)\right]^2 \tag{7}$$

De esta manera obtenemos el potencial de este sistema:

$$\boxed{V=\frac{1}{2}mg\ell(\eta_1^2+\eta_2^2)+\frac{1}{2}k\ell^2(\eta_1^2+\eta_2^2-2\eta_1\eta_2)} \tag{8}$$

Usamos el hecho que el potencial está definido a menos de una constante y que si calculamos las ecuaciones de Euler-Lagrange, ésta desaparecerá.

En forma matricial:

$$\mathbb{T}=\frac{1}{2}m\ell^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbb{V}=\frac{1}{2}\ell\begin{pmatrix}mg+k\ell & -k\ell\\ -k\ell & mg+k\ell\end{pmatrix} \tag{10}$$

Ahora se resuelve el problema de autovalores y autovectores:

$$det(\lambda\mathbb{T}-\mathbb{V})=det(\omega^2\mathbb{T}-\mathbb{V})=0 \tag{11}$$

Cuyo resultado da:

$$(\omega^2 m\ell-mg)(\omega^2 m\ell-mg-2k\ell)=0 \tag{12}$$

El primer factor da una frecuencia correspondiente a los péndulos simples desacoplados moviéndose en fase; y el segundo factor corresponde a un movimiento en contrafase con una frecuencia de acoplamiento entre los péndulos debido al resorte.

$$\boxed{\omega_1^2=\frac{g}{\ell}} \qquad \boxed{\omega_2^2=\frac{g}{\ell}+2\frac{k}{m}}$$

Los correspondientes autovectores son: $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ En término de los modos normales queda:

$$\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{pmatrix}=a\cos(\omega_1 t+\phi_1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+b\cos(\omega_2 t+\phi_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{13}$$

Luego queda ajustar las condiciones iniciales para determinar las constantes.