Guía 7: Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas. Hamilton-Jacobi.

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 5: a) Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$ en la dirección $\hat{z}$. Tome $\mathbf{A} = Bx\,\hat{y}$. Recuerde que el potencial generalizado es $V = -(e/c)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$.
b) Resuelva de nuevo el problema eligiendo ahora $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}$.
c) Demuestre que la siguiente transformación es canónica y úsela para encontrar una solución alternativa:

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2), \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2), \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2),$$

donde $\omega = eB/mc$.

Solución:
b) El lagrangiano en general es:

$$L = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + \frac{e}{c}\dot{x}_i A_i\right) - e\phi \tag{1}$$

En realidad tomé: $V = e\phi - \dfrac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$.

Los momentos generalizados son:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + \frac{e}{c}A_j \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_j = \frac{1}{m}\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right) \tag{2}$$

En definitiva el Hamiltoniano es:

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{x}_i - L = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{p_i}{m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right) - \frac{1}{2m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right)^2 - \frac{e}{c}\frac{1}{m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right)A_i\right] + e\phi \tag{3}$$

$$H = \sum_{i=1}^{3}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right)\left[\frac{p_i}{m} - \frac{1}{2m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right) - \frac{e}{c}\frac{1}{m}A_i\right] + e\phi = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right)^2 + e\phi \tag{4}$$

Puesto que solo interesa el campo magnético en este caso: $\phi = 0$

Si se toma $\dfrac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r} = \dfrac{1}{2}(-yB, xB, 0)$

De esta manera el hamiltoniano queda:

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x + \frac{1}{2}m\omega y\right)^2 + \left(p_y - \frac{1}{2}m\omega x\right)^2 + p_z^2\right]} \tag{5}$$

- $\omega = eB/mc$
- Notese que el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo.

- La fuerza $\vec{v} \times \vec{B}$ es ortogonal al desplazamiento de cargas, por lo que no realiza trabajo.
- por estas razones claramente H se conserva.
- En este caso si bien se puede resolver por medio de las transformaciones canónicas no es el camino que seguiré en general.

Del hecho que $\dot{p}_z = 0$, p_z es constante de movimiento. Con lo cual en la dirección z es un movimiento rectilíneo uniforme.

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m} p_z \tag{6}$$

El hamiltoniano se puede reescribir de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right] + \frac{1}{2}\omega(p_x y - p_y x) + \frac{1}{8} m\omega^2(x^2 + y^2) \tag{7}$$

Resulta que el momento angular en la dirección z es:

$$L_z = (p_x y - p_y x) \tag{8}$$

y se conserva puesto que $\boxed{\frac{\partial L_z}{\partial t} = 0}$ Puesto que el hamiltoniano queda definido a menos de una constante, por lo que puede redefinirse como:

$$H' = H - \frac{1}{2}\frac{p_z^2}{m} - \frac{1}{2}\omega L_z = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2\right] + \frac{1}{2} m\omega'^2(x^2 + y^2) \tag{9}$$

donde $\omega' = \omega/2$ quedando así el hamiltoniano de un oscilador armónico.

Cuyas soluciones son:

$$x = A\cos(\omega' t + \phi_x) \qquad y = B\cos(\omega' t + \phi_y) \tag{10}$$

Si hacemos $p^2 = p_x^2 + p_y^2$ y $r^2 = x^2 + y^2$ el hamiltoniano $H' \equiv E$ queda:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{r^2}{2E/m\omega'} = 1 \tag{11}$$

quedan órbitas espiraladas a lo largo de las líneas de campo magnético.

c) Si son transformaciones canónicas deben cumplir que:

$$[x_i, p_j] = \delta_{ij} \tag{12}$$

es en las variables $\{q_i, p_i\}$

Para ser claro:

$$[x, p_x] = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial p_x}{\partial p_1} - \frac{\partial x}{\partial p_1}\frac{\partial p_x}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial p_x}{\partial p_2} - \frac{\partial x}{\partial p_2}\frac{\partial p_x}{\partial q_2} \tag{13}$$

Si se hacen las cuatro combinaciones se comprueba explícitamente lo que se pide y las transformaciones son canónicas.

Para ser una solución alternativa al problema original... hay que reemplazarlo en el hamiltoniano original.

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x + \frac{1}{2}m\omega y\right)^2 + \left(p_y - \frac{1}{2}m\omega x\right)^2 + p_z^2\right] \tag{14}$$

Cada término queda:

$$p_x + \frac{1}{2}m\omega y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2) + \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2) = \sqrt{2p_1 m\omega}\cos q_1 \tag{15}$$

Con el otro término se procede de forma similar y se llega a que:

$$H = \omega p_1 + \frac{1}{2m}p_z^2 \tag{16}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \omega \Rightarrow q_1 = \omega t + \delta_0 \tag{17}$$

por otro lado p_1 es constante de movimiento. q_2 y p_2 también son constantes. Al volver a las variables originales se reobtiene la solución anterior.

- Si definimos $K = \omega p_1$ queda una variable de tipo ángulo-acción
- Las transformaciones propuestas separan variables al estilo de Hamilton-Jacobi.