Guía 7: *Ecuación de Hamilton–Jacobi. Variables de ángulo acción*

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 7: Una partícula de masa m se mueve en el potencial

$$V(x) = \tfrac{1}{2}m\omega^2(|x| - a)^2$$

a) Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya diagramas de fases, considerando especialmente las curvas de fases próximas al origen.
b) Muestre que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, y en cada una se definen distintas variables de ángulo–acción. Halle la variable de acción en función de E en cada caso.

Solución:

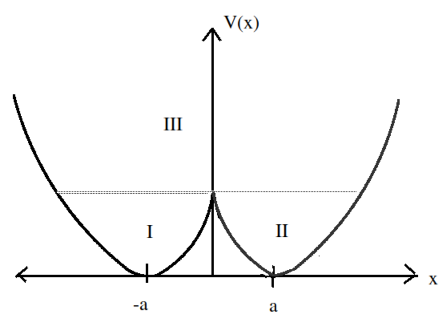
Este hamiltoniano se puede escribir explícitamente como dos regiones, la región I, para $x < 0$ y región II, para $x > 0$

$$H_I = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\lambda(x+a)^2$$
$$H_{II} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\lambda(x-a)^2$$

Y se tiene que $\boxed{\dot{x}_I = \frac{p}{m} \text{ y } \dot{p}_I = -m\lambda(x+a)}$

$$\boxed{\dot{x}_{II} = \frac{p}{m} \text{ y } \dot{p}_{II} = -m\lambda(x-a)}$$

Antes de armar el diagrama de fases es útil ver como es el potencial $V(x)$:



De este gráfico se ve claramente que hay tres regiones dinámicas distintas. La línea punteada es la separatriz entre los movimientos locales alrededor de cada punto de equilibrio y el movimiento acotado para todo el sistema.

La separatriz se calcula de manera tal que (en este caso) la energía E da $p(0) = 0$, es decir: $\boxed{\lambda^2 = \frac{2E}{ma^2}}$

De esta manera se obtiene la curva separatriz:

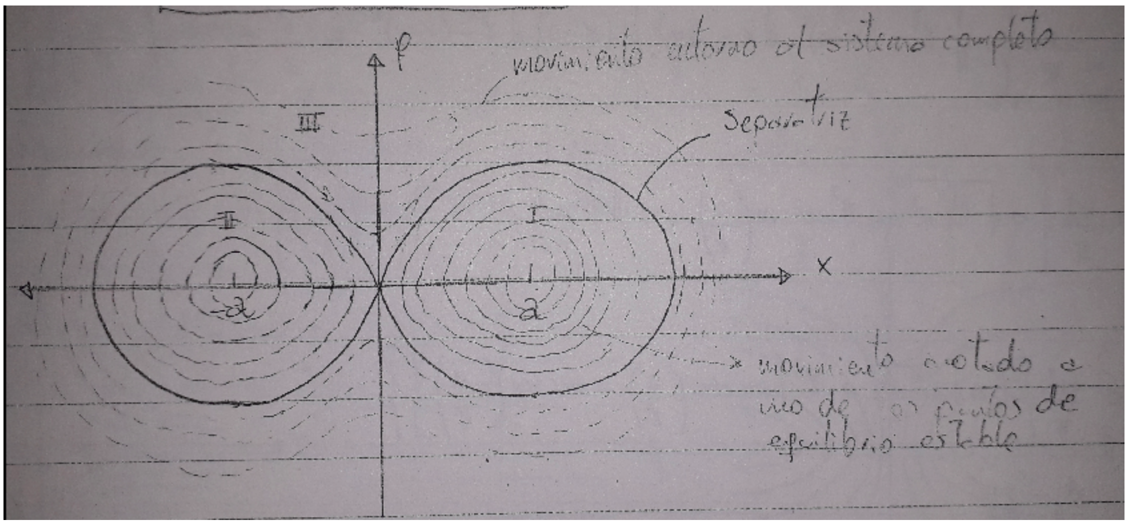
$$p = \pm\sqrt{2m\left[E - \frac{1}{2}m\lambda^2(x \mp a)^2\right]} = \pm\sqrt{2mE[a^2 - (x \mp a)^2]} \tag{1}$$

básicamente queda la ecuación de una elipse:

$$1 = \left(\frac{p}{\sqrt{2mE}}\right)^2 + \left(\frac{x \mp a}{\sqrt{\frac{2E}{m\lambda^2}}}\right)^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{2mE}}\right)^2 + \left(\frac{x \mp a}{a^2}\right)^2 \tag{2}$$

En los viejos tiempos... para mejorar el gráfico era de mucha ayuda ver el comportamiento cualitativo cerca del origen... bueno, ahora también.

$$p = \pm\sqrt{2mE[a^2 - (x \mp a)^2]} = \pm\sqrt{2mE}\sqrt{[a^2 - (x \mp a)^2]} = \pm\sqrt{2mE}\sqrt{[-x^2 \pm 2ax]} \approx \pm\sqrt{\frac{2mE}{a^2}}\sqrt{2a|x|} \tag{3}$$



b) En el caso que $E < \frac{1}{2}m\lambda^2 a^2$ estamos en la región I o II, la integral de acción es el área de la elipse.

$$J_I = \frac{1}{2\pi}\oint pdq = \frac{1}{2\pi}\pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\lambda^2}} = \frac{E}{\lambda} = J_{II} \tag{4}$$

Para la región III tenemos que:

$$J_{III} = \frac{2}{\pi}\int_0^{2a}\sqrt{2m\left[E - \frac{1}{2}m\lambda^2(x-a)^2\right]}\,dx = \frac{2m\lambda}{\pi}\int_0^{2a}\sqrt{\left[\frac{2E}{m\lambda^2} - (x-a)^2\right]}\,dx \tag{5}$$

$$J_{III} = \frac{2m\lambda}{\pi}\int_0^{2a}\sqrt{[\gamma^2 - (x-a)^2]}\,dx \tag{6}$$

donde definimos por comodidad: $\gamma^2 = 2E/(m\lambda^2)$

$$J_{III} = \frac{m\lambda}{\pi}\left[(x-a)\sqrt{\gamma^2 - (x-a)^2} + a^2\text{arctg}\left[\frac{x-a}{\sqrt{\gamma^2 - (x-a)^2}}\right]\right]_0^{2a} = \frac{E}{\lambda/2} \tag{7}$$