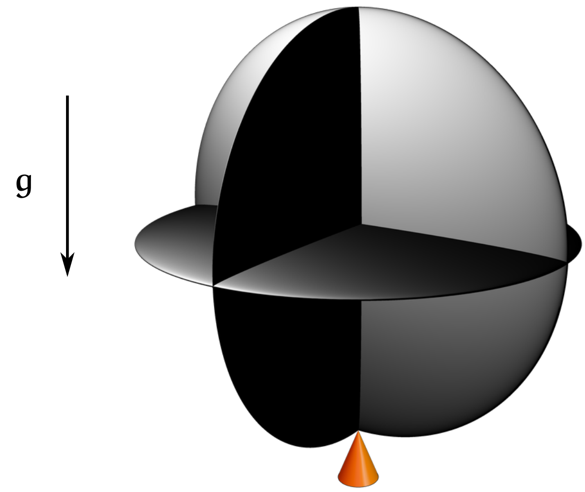
Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021
Segundo parcial resuelto*

■ **Problema 1.** Tres discos homogéneos de radio a y masa m se encuentran rígidamente unidos como muestra la figura. Los discos están en planos mutuamente perpendiculares y sus centros se hallan en el mismo punto. El cuerpo rígido formado por los tres discos tiene como punto fijo el vértice de un pequeño cono de apoyo. Más allá de eso, el cuerpo rígido puede asumir cualquier orientación. Hay gravedad en la dirección vertical. Para mayor claridad, puede ver la siguiente animación.



a) Elija un punto del cuerpo, determine un conjunto de ejes principales de inercia y calcule los momentos principales respecto de dicho punto y según esos ejes.

b) Elija coordenadas generalizadas y escriba el lagrangiano del sistema.

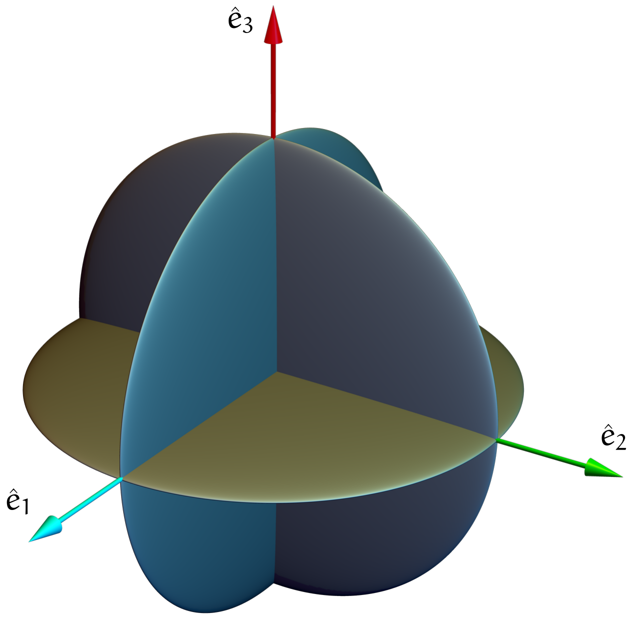
c) Escriba el hamiltoniano del sistema.

d) Identifique cantidades conservadas.

e) Reduzca el problema a un problema unidimensional equivalente para alguna de las coordenadas.

■ **Solución**. Calcularemos el tensor de inercia con respecto al centro de los tres discos. Si orientamos el cuerpo rígido como muestra la figura, una posible elección de ejes principales de inercia son los tres ejes $\hat{e}_i$.

*zanellaj@df.uba.ar



Que esto es así es debido a que el cuerpo tiene simetría de rotación respecto de estos tres ejes (rotaciones de ángulo $\pi/2$). Veremos que se trata de una peonza simétrica, de manera que la elección de ejes principales dista de ser única. Para calcular los momentos de inercia principales, es suficiente con saber que el momento de inercia de un disco según su eje de simetría es

$$I_0 = \frac{ma^2}{2}, \tag{1}$$

por lo tanto, según cualquiera de sus diámetros el momento de inercia es $I_0/2$.

El momento de inercia del sistema de los tres discos según el eje 1 es la suma de los momentos de inercia de dos de los discos según uno de sus diámetros más el momento de inercia del tercer disco según su eje de simetría:

$$I = 2 \times \frac{I_0}{2} + I_0 = 2I_0 = ma^2. \tag{2}$$

Lo mismo sucederá si calculamos el momento de inercia según las direcciones 2 y 3. Así, los tres momentos principales de inercia son iguales a I. No sólo es una peonza simétrica sino que es completamente simétrica respecto a su centro de masa, como una esfera.

Para escribir el lagrangiano usaremos los ángulos de Euler. Con el origen en el punto fijo del cuerpo, la posición del centro de masa es

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}}(\theta, \varphi) = a\,\hat{e}_3(\theta, \varphi) = a\,\hat{r}(\theta, \varphi - \pi/2). \tag{3}$$

El módulo de la velocidad al cuadrado del centro de masa es

$$v_{\mathrm{CM}}^2 = a^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta). \tag{4}$$

La energía cinética total será

$$T = T_{\text{rot}} + T_{\text{CM}} = \frac{I}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta), \tag{5}$$

donde

$$I_1 = I + 3ma^2 = 4ma^2. \tag{6}$$

Se reconoce aquí el teorema de Steiner. Por otro lado, la energía potencial es

$$V(\theta) = 3mga\cos\theta. \tag{7}$$

El lagrangiano resulta entonces

$$\mathcal{L} = \frac{I}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - 3mga\cos\theta. \tag{8}$$

Para calcular el hamiltoniano notemos que $H = T + V$. Lo único que necesitamos hacer es escribir T en términos de los impulsos generalizados. A partir de $\mathcal{L}$ obtenemos

$$p_\psi = I(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta), \tag{9}$$

$$p_\varphi = I(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta + I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta = p_\psi\cos\theta + I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta, \tag{10}$$

$$p_\theta = I_1\dot{\theta}. \tag{11}$$

No necesitamos despejar $\dot{\psi}$ para poder escribir T, nos alcanza con haber escrito la combinación $\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$ en términos de p_ψ. En cambio sí necesitamos despejar explícitamente $\dot{\varphi}$ de la segunda ecuación,

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}. \tag{12}$$

Finalmente,

$$H = \frac{p_\psi^2}{2I} + \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + 3mga\cos\theta. \tag{13}$$

Respecto a las constantes de movimiento: tenemos el hamiltoniano H, pues no depende explícitamente del tiempo, y los impulsos p_ψ y p_φ, pues ψ y φ son cíclicas. El problema unidimensional equivalente para θ está definido por el siguiente hamiltoniano

$$H_\theta(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + 3mga\cos\theta. \tag{14}$$

Alternativamente, queda definido en términos de la ecuación de conservación

$$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + 3mga\cos\theta = \mathcal{A}, \tag{15}$$

o en términos del lagrangiano

$$\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} - 3mga\cos\theta. \tag{16}$$

En todo caso, el potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + 3mga\cos\theta. \tag{17}$$

■ **Problema 2**. Se tiene una partícula que se mueve en dos dimensiones en presencia de un potencial de la forma:

$$V(r) = \frac{a}{r^2}, \qquad \text{con } a > 0.$$

a) Escribir el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton.

b) Escribir la ecuación de Hamilton–Jacobi y encontrar las expresiones integrales para las funciones S y W.

c) A partir de S o W hallar $r(t)$ y $r(\theta)$.

■ **Solución**. A este problema ya lo hemos resuelto en la guía de fuerzas centrales. Eligiendo como plano de movimiento el plano xy, en coordenadas esféricas el hamiltoniano es

$$H(r,\theta,p_r,p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{a}{r^2}. \tag{18}$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \qquad \dot{p}_r = \frac{1}{r^3}\left(\frac{p_\theta^2}{m} + 2a\right), \qquad \dot{p}_\theta = 0. \tag{19}$$

La ecuación de H–J es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{a}{r^2} = 0. \tag{20}$$

Es un sistema conservativo y la coordenada θ es cíclica, de manera que buscamos la solución de la ecuación de H–J como

$$S = -Et + W(r,\theta), \tag{21}$$

con

$$W(r,\theta) = \theta p_\theta + W_r(r). \tag{22}$$

A su vez, W es solución de la ecuación de H–J reducida,

$$H\left(r,\theta,\frac{\partial W}{\partial r},\frac{\partial W}{\partial \theta}\right) = E \quad \Rightarrow \quad \frac{W_r'^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{a}{r^2} = E. \tag{23}$$

Puesto que $a > 0$, el problema efectivo para la coordenada r tiene un punto de retorno $r_0(E, p_\theta)$. Tomando ese punto como extremo inferior de integración, escribimos

$$W_r(r, E, p_\theta) = \pm\sqrt{2m}\int_{r_0(E,p_\theta)}^{r} dr\, \sqrt{E - \frac{a}{r^2} - \frac{p_\theta^2}{2mr^2}}\,. \tag{24}$$

Con esto ya tenemos las expresiones integrales de S y de W,

$$W(r, \theta, E, p_\theta) = \theta p_\theta \pm \sqrt{2m}\int_{r_0(E,p_\theta)}^{r} dr\, \sqrt{E - \frac{a}{r^2} - \frac{p_\theta^2}{2mr^2}}\,, \tag{25}$$

$$S(r, \theta, E, p_\theta, t) = -Et + W(r, \theta, E, p_\theta). \tag{26}$$

Tenemos en realidad dos soluciones, una para p_r mayor o igual que cero y la otra para p_r menor o igual que cero, según el signo al frente de la integral.

Para encontrar $r(t)$ y $r(\theta)$, trabajaremos con la función generatriz definida por W, donde E y p_θ son los nuevos impulsos. El hamiltoniano en las nuevas variables es

$$K(Q_1, Q_2, E, p_\theta) = E, \tag{27}$$

de manera que, salvo Q_1, todas las nuevas variables son constantes, mientras que

$$\dot{Q}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = t - t_0. \tag{28}$$

Para encontrar una relación entre r y el tiempo, primero escribimos la ecuación que define a la nueva coordenada conjugada de E en términos de r y de los nuevos impulsos,

$$Q_1(r, E, p_\theta) = \frac{\partial W}{\partial E} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0(E,p_\theta)}^{r} dr\, \frac{1}{\sqrt{E - \frac{a}{r^2} - \frac{p_\theta^2}{2mr^2}}}\,. \tag{29}$$

La derivada respecto al extremo inferior de la integral es cero porque se trata del punto de retorno, es decir, donde se anula el integrando de la expresión (25). Sacando fuera de la raíz un factor $1/r^2$, se ve que la integral es elemental

$$Q_1(r, E, p_\theta) = \pm\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\sqrt{r^2 - \frac{2ma + p_\theta^2}{2mE}}\,. \tag{30}$$

De aquí resulta

$$r = \sqrt{\frac{2EQ_1^2}{m} + \frac{2ma + p_\theta^2}{2mE}}\,. \tag{31}$$

La ambigüedad en el signo desapareció al elevar al cuadrado. Combinando este resultado con el que obtuvimos a partir de la dinámica de Q_1, queda

$$r(t) = \sqrt{\frac{2(t - t_0)^2 E}{m} + \frac{2ma + p_\theta^2}{2mE}}\,. \tag{32}$$

Aquí vemos que el significado de la constante de integración t_0 es el de ser el tiempo en el que se alcanza el punto de retorno, pues ahí r es mínimo. Una sencilla verificación muestra que si $a = 0$, es decir, cuando tenemos una partícula libre, la ecuación anterior da el resultado correcto para una partícula que se mueve con velocidad constante definida por $E = mv^2/2$ y con un parámetro de impacto dado por $p_\theta = mbv$.

Para obtener una relación entre r y θ escribimos la otra ecuación de transformación,

$$Q_2(r, \theta, E, p_\theta) = \frac{\partial W}{\partial p_\theta} = \theta \mp \int_{r_0(E,p_\theta)}^{r} dr \, \frac{p_\theta/r^2}{\sqrt{2mE - \dfrac{2ma + p_\theta^2}{r^2}}}. \tag{33}$$

Con la sustitución $u = 1/r$ la integral es elemental. Hay que usar que el punto de retorno satisface la ecuación

$$\frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{2ma + p_\theta^2}{2mE}} = 1, \tag{34}$$

y que $\arcsin x - \frac{\pi}{2} = -\arccos x$. El resultado final es

$$Q_2 = \theta \mp \frac{p_\theta}{\sqrt{2ma + p_\theta^2}} \; \arccos\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2ma + p_\theta^2}{2mE}}\right). \tag{35}$$

De aquí se obtiene r como función de θ,

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{2ma + p_\theta^2}{2mE}} \; \frac{1}{\cos\left[\dfrac{\sqrt{2ma + p_\theta^2}}{p_\theta}(\theta - Q_2)\right]}. \tag{36}$$

Otra vez desaparece la duplicidad de signos, y vemos que Q_2 es el valor que asume θ en el punto de retorno. Para $a = 0$, la anterior es la ecuación de una recta.

■ **Problema 3**. Estudie una partícula sometida a un potencial:

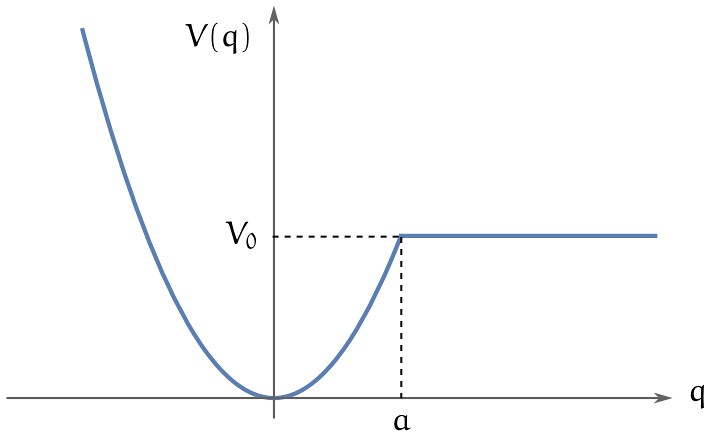
$$V(q) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{a^2} q^2, & q < a; \\ \\ V_0, & q \geqslant a. \end{cases}$$

a) Escriba el hamiltoniano y dibuje su diagrama de fase.

b) Diga cuántas y qué tipos de regiones dinámicas existen.

c) Escribir las ecuaciones de transformación entre las coordenadas p y q y las variables de ángulo–acción en la zona de libración. Calcule la frecuencia como función de la energía.

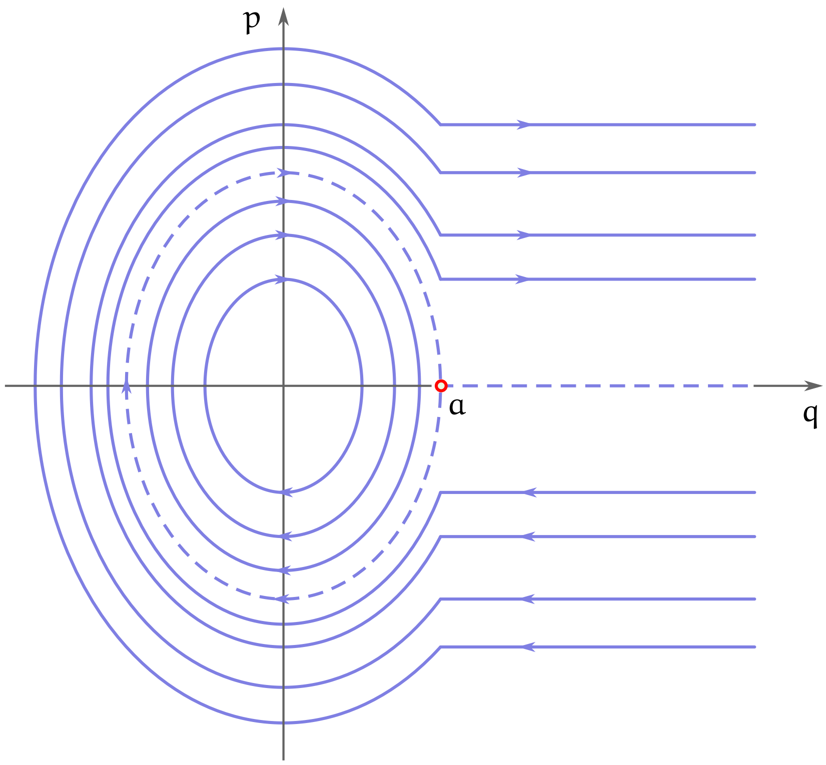
■ **Solución**. El potencial es como muestra la figura.



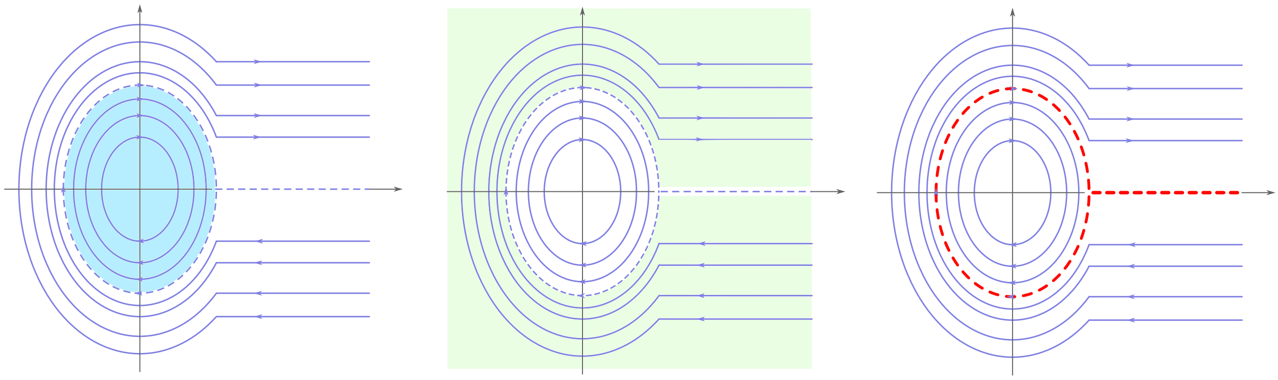
El hamiltoniano es

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \tag{37}$$

El retrato de fase es muy simple de construir. Las órbitas son las curvas de nivel de H. Para $E < V_0$, las curvas de nivel son elipses. Cuando la energía es mayor que V_0, las elipses se interrumpen en la línea $q = a$ y a partir de allí las órbitas son semirectas paralelas al eje q. Justo para $E = V_0$ tenemos un caso especial: la órbita es la unión de la elipse correspondiente a la energía V_0 y de la semirecta $p = 0$, $a < q$.



Hay dos regiones dinámicas: para energías $E < V_0$ hay movimiento de libración. Para energía $E > V_0$ y $p \neq 0$ hay movimiento no acotado; cada órbita tiene en esa región un punto de retorno. La curva de nivel $E = V_0$ es la separatriz entre las dos regiones. Consta de la unión de la elipse de energía V_0 y de la semirecta $p = 0$, $q > a$. El punto $p = 0$, $q = a$ no pertenece, en rigor, al espacio de fase, pues en $q = a$ la derivada del potencial es discontinua.



Las variables de ángulo–acción en la región de libración serán las de un oscilador lineal de contante $k = 2V_0/a^2$. Calculemos primero la acción, que es el área de las elipses dividida por 2π. Las elipses están definidas implícitamente por la ecuación

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 = E \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/k} = 1. \tag{38}$$

De aquí leemos las longitudes de los semiejes de la elipse de energía E. El área de la elipse es π veces el producto de esas longitudes. Luego,

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \times \pi\sqrt{2mE}\,\sqrt{\frac{2E}{k}} = \frac{E}{\omega}, \tag{39}$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2V_0}{ma^2}}\,. \tag{40}$$

Evidentemente ω es la frecuencia del movimiento de libración. Eso también está claro si calculamos la frecuencia como la derivada de $E(J)$ respecto de J:

$$\frac{\partial E(J)}{\partial J} = \omega. \tag{41}$$

Para escribir la variable conjugada a J necesitamos la función generatriz. Empezamos buscando la función característica de Hamilton, que satisface la ecuación

$$\frac{W'(q)^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E. \tag{42}$$

Es decir,

$$W(q, E) = \pm\sqrt{2m}\int_{-q_E}^{q} dx\,\sqrt{E - \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2}, \tag{43}$$

donde, por comodidad, hemos tomado como extremo inferior de la integral el punto de retorno

$$-q_E = -\sqrt{\frac{2E}{k}} = -a\sqrt{\frac{E}{V_0}} = -\sqrt{\frac{2J}{m\omega}}. \tag{44}$$

Considerada como función de J, que es el nuevo impulso, resulta

$$W(q,J) = \pm\sqrt{2m}\int_{-q_E}^{q} dx\, \sqrt{\omega J - \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2}\,. \tag{45}$$

La variable ángulo es

$$\theta(q,J) = \frac{\partial W}{\partial J}(q,E) = \pm\omega\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{-q_E}^{q} dx\, \frac{1}{\sqrt{\omega J - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}}\,. \tag{46}$$

De nuevo hemos usado que la derivada respecto del extremo inferior de la integral es cero. La integral es elemental:

$$\theta(q,J) = \pm\left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}q\right) - \arcsin\left(-\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}q_E\right)\right]. \tag{47}$$

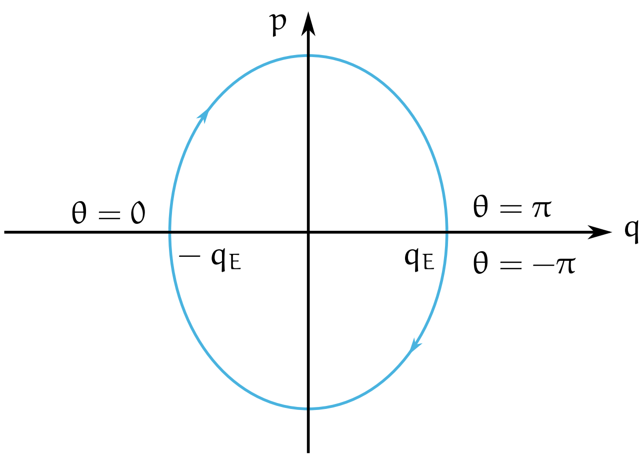
Pero

$$-\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}q_E = -1, \tag{48}$$

de manera que

$$\theta(q,J) = \pm\left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}q\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \pm\arccos\left(-\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}q\right). \tag{49}$$

La variable ángulo es 0 en $q = -q_E$. Sobre la rama de la órbita con $p > 0$, a medida que q aumenta desde $-q_E$ hasta q_E, el ángulo θ varía entre 0 y π. Recíprocamente, sobre la rama con $p < 0$, el ángulo θ disminuye desde 0 hasta $-\pi$ a medida que q varía entre $-q_E$ y q_E.



Evidentemente, θ varía en 2π en una órbita completa.

Invirtiendo la ecuación anterior obtenemos q como función de J y de θ,

$$q(J,\theta) = -\sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\cos\theta. \tag{50}$$

Por otro lado,

$$p = \pm\sqrt{2m}\,\sqrt{\omega J - \tfrac{1}{2}m\omega^2 q^2} = \pm\sqrt{2m\omega J}\,|\sin\theta|. \tag{51}$$

Pero ya hemos visto que el tramo de la órbita con $p < 0$ corresponde a $\theta < 0$, y viceversa, de manera que podemos escribir directamente

$$p(J,\theta) = \sqrt{2Jm\omega}\,\sin\theta, \tag{52}$$

que es la segunda ecuación de transformación.

Por último, debido a que $\theta = \omega(t - t_0)$, se ve de manera inmediata que las ecuaciones anteriores dan la solución correcta para el problema del oscilador lineal. Lo único que puede parecer raro es el signo menos frente a la expresión de $q(J,\theta)$, pero eso tiene que ver con la elección del cero de θ, que a su vez tiene que ver con cómo hemos elegido integrar $W'(q)$.