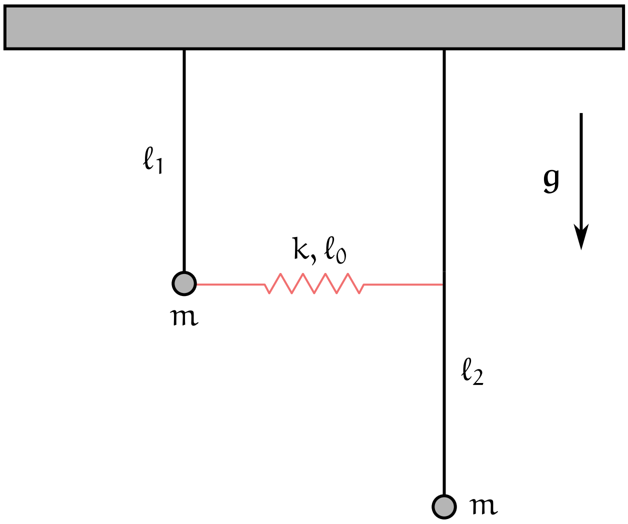
Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021

Primer parcial 17/5. *Resuelto.* *

■ **Problema 1**. El sistema de la figura representa dos péndulos de igual masa m y barras de masa despreciable cuyas longitudes son ℓ_1 y $\ell_2 = 2\ell_1$ respectivamente. Las barras están unidas por un resorte de constante k y longitud natural ℓ_0 de manera que en el caso de que las barras están en la posición vertical, el resorte se encuentra relajado y orientado horizontalmente. El movimiento del sistema se desarrolla en el plano vertical.



a) Encuentre los grados de libertad del sistema y su lagrangiano.

b) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.

c) Indique si tiene magnitudes conservadas y escriba cuáles son.

■ **Solución**. a) Tomando como coordenadas generalizadas los ángulos φ_1 y φ_2 que muestra la figura de la página siguiente, las posiciones de las dos partículas son

$$\mathbf{r}_1 = \ell_1\,\hat{\rho}(\varphi_1), \qquad \mathbf{r}_2 = \ell_0\,\hat{y} + \ell_2\,\hat{\rho}(\varphi_2). \tag{1}$$

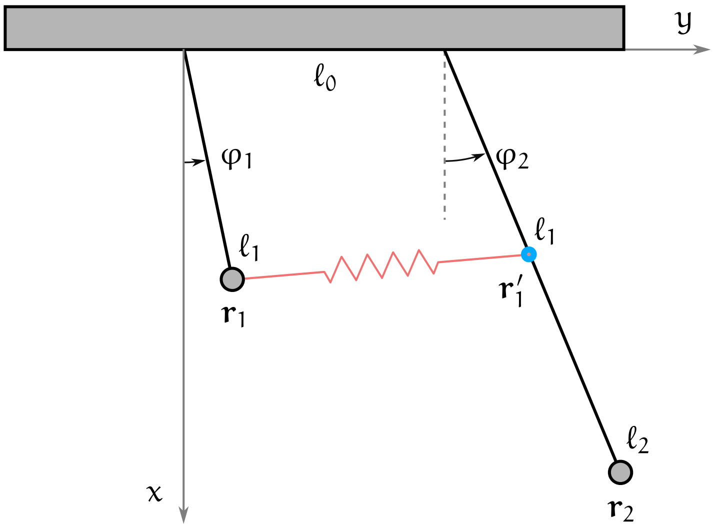
Teniendo en cuenta que $\ell_2 = 2\ell_1$, la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}m\ell_1^2(\dot{\varphi}_1^2 + 4\dot{\varphi}_2^2). \tag{2}$$

Los dos extremos del resorte están en $\mathbf{r}_1$ y en

$$\mathbf{r}_1' = \ell_0\,\hat{y} + \ell_1\,\hat{\rho}(\varphi_2). \tag{3}$$

* zanellaj@df.uba.ar



La energía potencial es

$$V = \tfrac{1}{2}k\,(|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1| - \ell_0)^2 - mg\ell_1(\cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2). \tag{4}$$

La longitud del resorte está dada por

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1|^2 &= |\ell_0\,\hat{y} + \ell_1\,\hat{\rho}(\varphi_2) - \ell_1\,\hat{\rho}(\varphi_1)|^2 \\ &= \ell_0^2 + 2\ell_1^2 + 2\ell_0\ell_1(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) - 2\ell_1^2\cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \tag{5}$$

Definamos la función

$$f(\varphi_1,\varphi_2) = \sqrt{\ell_0^2 + 2\ell_1^2 + 2\ell_0\ell_1(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) - 2\ell_1^2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{6}$$

Finalmente, el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\varphi_1,\varphi_2,\dot\varphi_1,\dot\varphi_2) = \tfrac{1}{2}m\ell_1^2(\dot\varphi_1^2 + 4\dot\varphi_2^2) - \tfrac{1}{2}k\big[f(\varphi_1,\varphi_2) - \ell_0\big]^2 + mg\ell_1(\cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2). \tag{7}$$

b) Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$m\ell_1^2\ddot\varphi_1 = -k\,\frac{f(\varphi_1,\varphi_2) - \ell_0}{f(\varphi_1,\varphi_2)}\big[-\ell_0\ell_1\cos\varphi_1 + \ell_1^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big] - mg\ell_1\sin\varphi_1, \tag{8}$$

$$4m\ell_1^2\ddot\varphi_2^2 = -k\,\frac{f(\varphi_1,\varphi_2) - \ell_0}{f(\varphi_1,\varphi_2)}\big[\ell_0\ell_1\cos\varphi_2 - \ell_1^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big] - 2mg\ell_1\sin\varphi_2. \tag{9}$$

c) Sabemos que en un sistema cerrado con 2 grados de libertad habrá 3 constantes de movimiento. En este problema la única constante de movimiento evidente es la energía mecánica total,

$$\mathcal{E} = T + V = \tfrac{1}{2}m\ell_1^2(\dot\varphi_1^2 + 4\dot\varphi_2^2) + \tfrac{1}{2}k\big[f(\varphi_1,\varphi_2) - \ell_0\big]^2 - mg\ell_1(\cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2), \tag{10}$$

que es igual a la función h y cuya conservación está relacionada con que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo.

■ **Problema 2**. El potencial de una partícula de prueba de masa m en el campo gravitatorio del Sol es $V(r) = -km/r$. Una distribución uniforme de materia dentro del sistema solar agrega al potencial gravitatorio del Sol una fuerza dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -mC\,\mathbf{r}, \tag{11}$$

donde C es una constante positiva.

a) ¿Cuál es el período de la órbita circular de radio r_0? El resultado debe quedar expresado en términos de r_0, k y C.

b) ¿Qué condición deben satisfacer r_0, k y C para que el efecto de la nueva fuerza sea apenas una corrección al campo gravitatorio del Sol?

c) Calcule el período de las oscilaciones radiales para pequeñas perturbaciones alrededor de la órbita circular de radio r_0. El resultado debe quedar expresado en términos de r_0, k y C.

d) Muestre que estas órbitas casi circulares pueden ser aproximadas por elipses en precesión. *Ayuda:* si $|\epsilon| \ll 1$ entonces $1 - \epsilon \simeq 1/(1+\epsilon)$.

e) ¿Cuál es la velocidad de precesión Ω_{prec}? Escriba Ω_{prec} en términos de r_0, k y C y aproxime el resultado hasta la primera corrección no nula en la magnitud de C.

f) ¿Cuál es el sentido de precesión respecto al sentido del movimiento orbital?

■ **Solución**. a) El camino más directo para determinar la relación entre el radio r_0 y el período $T = 2\pi/\omega$ de las órbitas circulares es igualar la fuerza a la masa por la aceleración,

$$m\omega^2 r_0 = \frac{mk}{r_0^2} + mCr_0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{r_0^3} + C}. \tag{12}$$

Notar que si C es igual a cero, obtenemos la tercera ley de Kepler, y si $k = 0$ obtenemos que $\sqrt{C}$ es la frecuencia angular del oscilador isótropo, lo que tiene sentido, puesto que el potencial debido a la nueva fuerza es $V_F = \frac{1}{2}mCr^2$.

b) Para que a distancias del orden de r_0 la nueva fuerza sea apenas una corrección, su magnitud debe ser mucho menor que la fuerza gravitatoria del Sol,

$$mCr_0 \ll \frac{mk}{r_0^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Cr_0^3}{k} \ll 1. \tag{13}$$

Podemos definir el parámetro adimensional

$$\lambda = \frac{Cr_0^3}{k}. \tag{14}$$

Así,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{r_0^3} + C} = \omega_0\sqrt{1+\lambda}, \tag{15}$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{r_0^3}} \tag{16}$$

es la frecuencia angular en ausencia de la nueva fuerza.

c) La coordenada radial está gobernada por la siguiente ley de conservación

$$\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{mk}{r} + \tfrac{1}{2}mCr^2 = \mathcal{E}. \tag{17}$$

El potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{mk}{r} + \tfrac{1}{2}mCr^2. \tag{18}$$

Para la órbita circular valen dos relaciones, que determinan, respectivamente, su radio r_0 y el valor de su energía:

$$V'_{\text{ef}}(r_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{l^2}{mr_0^3} + \frac{mk}{r_0^2} + mCr_0 = 0, \tag{19}$$

$$V_{\text{ef}}(r_0) = \frac{l^2}{2mr_0^2} - \frac{mk}{r_0} + \tfrac{1}{2}mCr_0^2 = \mathcal{E}_0. \tag{20}$$

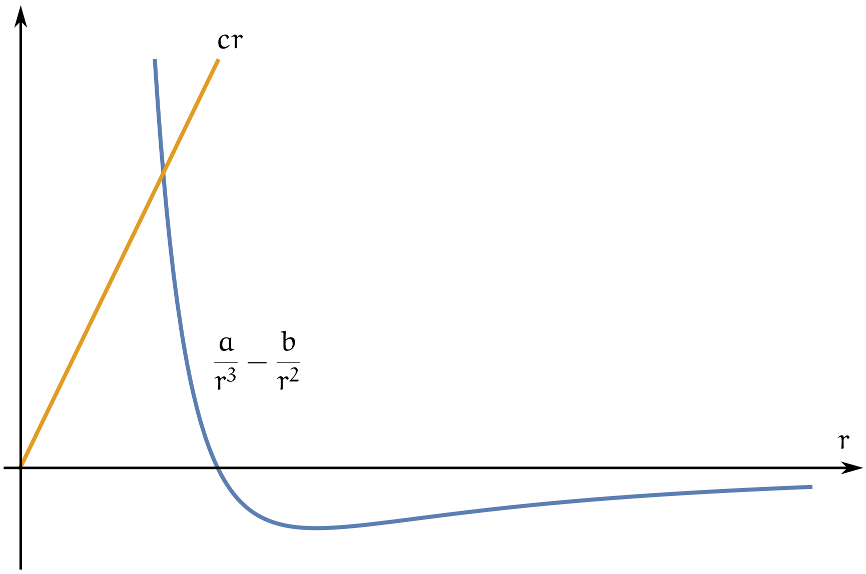
Puesto que, para la órbita circular, $l = m\omega r_0^2$, la primera relación es equivalente a la condición (12) obtenida en el *item* (a). Por otro lado, usando la primera relación para eliminar l, la segunda se lee como

$$-\frac{mk}{2r_0} + mCr_0^2 = \mathcal{E}_0. \tag{21}$$

El potencial efectivo tiende a infinito tanto para $r \to 0$ como para $r \to \infty$. Es fácil convencerse de que V_{ef} tiene un único punto crítico para $r > 0$. En efecto, la condición de punto crítico se puede escribir como

$$\frac{l^2}{mr^3} - \frac{mk}{r^2} = mCr. \tag{22}$$

Gráficamente vemos que siempre hay uno y sólo un punto de intersección entre las funciones a ambos lados de la ecuación.



Por otra parte, debido al comportamiento asintótico de $V_{ef}(r)$, estamos seguros de que ese punto crítico es un mínimo. Esto implica que la órbita circular es estable.

Supongamos que fijamos el valor de l. Esto determina el potencial efectivo, en particular el radio r_0 y la energía $\mathcal{E}_0$ de la órbita circular. Ahora asumamos que r no es exactamente r_0, sino que está dado por

$$r(t) = r_0 + \delta r(t), \tag{23}$$

donde $|\delta r(t)| \ll r_0$. Expandiendo la ec. (17) hasta orden δr^2,

$$\tfrac{1}{2}m\dot{\delta r}^2 + \frac{l^2}{2mr_0^2}\left(1 - 2\frac{\delta r}{r_0} + 3\frac{\delta r^2}{r_0^2}\right) - \frac{mk}{r_0}\left(1 - \frac{\delta r}{r_0} + \frac{\delta r^2}{r_0^2}\right) + \tfrac{1}{2}mCr_0^2\left(1 + 2\frac{\delta r}{r_0} + \frac{\delta r^2}{r_0^2}\right) = \mathcal{E}. \tag{24}$$

Los términos lineales en δr se anulan, que es algo que debe ocurrir por la condición de extremo del potencial efectivo, y los términos constantes valen $\mathcal{E}_0$. Luego,

$$\tfrac{1}{2}m\dot{\delta r}^2 + \left(\frac{3l^2}{2mr_0^2} - \frac{mk}{r_0} + \tfrac{1}{2}mCr_0^2\right)\frac{\delta r^2}{r_0^2} = \delta\mathcal{E}, \tag{25}$$

donde $\delta\mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$. Si volvemos a usar la ec. (19) para escribir $l^2/(2mr_0^2)$ en términos de r_0, k y C, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}\dot{\delta r}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{r_0^3} + 4C\right)\delta r^2 = \frac{\delta\mathcal{E}}{m}. \tag{26}$$

De aquí leemos la frecuencia de las oscilaciones radiales

$$\Omega_r = \sqrt{\frac{k}{r_0^3} + 4C} = \omega_0\sqrt{1 + 4\lambda}. \tag{27}$$

El período de las oscilaciones radiales es $T_r = 2\pi/\Omega_r$. Que la frecuencia sea un número real reafirma el hecho de que la órbita circular es estable.

d) La solución para el movimiento radial de una órbita casi circular es entonces

$$r(t) = r_0 + \delta r_0 \cos(\Omega_r t + \alpha_0), \tag{28}$$

donde δr_0 y α_0 son constantes, Para ver el movimiento en el espacio, conviene escribir r como función de φ. Debido a que, en la ecuación anterior, el tiempo t aparece dentro de la perturbación, podemos usar la relación entre t y φ que vale para la órbita circular,

$$\varphi(t) = \omega t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\varphi}{\omega}, \tag{29}$$

donde ω es la frecuencia angular de la órbita circular, ec. (15). Volviendo a la ec. (28),

$$r(\varphi) = r_0 + \delta r_0 \cos\left(\frac{\Omega_r}{\omega}\varphi + \alpha_0\right). \tag{30}$$

Ahora es cuando utilizamos la ayuda del enunciado para escribir

$$r(\varphi) \simeq \frac{r_0}{1 - \dfrac{\delta r_0}{r_0}\cos\left(\dfrac{\Omega_r}{\omega}\varphi + \alpha_0\right)}. \tag{31}$$

Esta es, por definición, la ecuación en coordenadas polares, de una elipse en precesión. Si C fuera igual a cero, el cociente entre las dos frecuencias sería igual a uno, y tendríamos una elipse propiamente dicha, con el origen en uno de sus focos. Sabemos que ese es el resultado correcto para el problema de Kepler. Por otra parte, si k fuera igual a cero, el cociente de las frecuencias es 2 y podemos escribir

$$r(\varphi) \simeq \frac{r_0}{1 - \dfrac{\delta r_0}{r_0}\cos(2\varphi + \alpha_0)} \simeq \frac{r_0}{\sqrt{1 - 2\dfrac{\delta r_0}{r_0}\cos(2\varphi + \alpha_0)}}, \tag{32}$$

que es la ecuación de una elipse con centro en el origen. Sabemos que este es el resultado correcto para el oscilador isótropo bidimensional.

e) La ec. (31) muestra que $r(\varphi)$ es una función periódica de φ de período

$$\tau = 2\pi\,\frac{\omega}{\Omega_r}. \tag{33}$$

Recordemos que

$$\omega = \omega_0\sqrt{1+\lambda}, \qquad \Omega_r = \omega_0\sqrt{1+4\lambda}. \tag{34}$$

Así, τ es menor que 2π, digamos

$$\tau = 2\pi - \Delta\varphi, \tag{35}$$

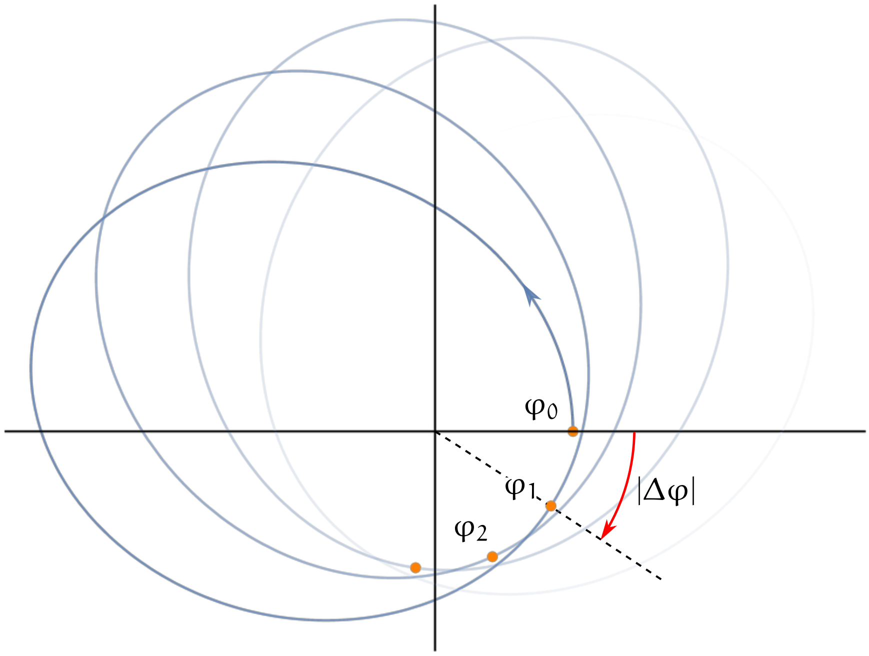
donde

$$\Delta\varphi = 2\pi - 2\pi\,\frac{\omega}{\Omega_r} = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{1+\lambda}{1+4\lambda}}\right). \tag{36}$$

Si $\varphi = 0$ en un determinado paso por el perihelio, el siguiente perihelio ocurrirá en

$$\varphi_1 = 2\pi - \Delta\varphi. \tag{37}$$

Esto significa que hay una separación angular $-\Delta\varphi$ entre dos perihelios consecutivos. En la figura, la excentricidad de la órbita se ha exagerado para hacer visible el efecto.



Por otro lado, el tiempo transcurrido entre estos dos pasos por el perihelio viene dado por el período de las oscilaciones radiales, calculado en el *item* anterior,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega_r} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1+4\lambda}}. \tag{38}$$

Luego, la velocidad angular de precesión es

$$\Omega_{\text{prec}} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = -\omega_0\sqrt{1+4\lambda}\left(1 - \sqrt{\frac{1+\lambda}{1+4\lambda}}\right). \tag{39}$$

Este resultado vale en general. Ahora analizaremos lo que sucede cuando la nueva fuerza es sólo una perturbación comparada con la atracción gravitatoria del Sol. Lo que está dentro del paréntesis en la ec. (39) ya es de orden λ. Por lo tanto, hasta ese orden resulta

$$\Omega_{\text{prec}} \simeq -\omega_0\left[1 - (1+\tfrac{1}{2}\lambda)(1-2\lambda)\right] \simeq -\frac{3}{2}\omega_0\lambda. \tag{40}$$

La precesión es en el sentido contrario al del movimiento orbital. Explícitamente,

$$\Omega_{\text{prec}} \simeq -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{r_0^3}{k}}\,C = -\frac{3C}{2\omega_0}. \tag{41}$$

■ Un método alternativo para obtener $r(\varphi)$ para la órbita casi circular consiste en partir de la ecuación de conservación del problema unidimensional y hacer el cambio de variable independiente de t a φ y el cambio de variable dependiente de r a $u = 1/r$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{l^2}\left(-mku + \frac{mC}{2u^2}\right) = \frac{2m\mathcal{E}}{l^2}. \tag{42}$$

Reemplazando u por $u_0 + \delta u(\varphi)$ y expandiendo hasta orden cuadrático en δu, queda

$$\delta u'^2 + \left(1 + \frac{m^2}{l^2}\frac{3C}{u_0^4}\right)\delta u^2 = \delta\mathcal{A}, \tag{43}$$

donde $\delta\mathcal{A}$ es una constante. Usando la relación entre l y la frecuencia angular para la órbita circular, se obtiene

$$\delta u'^2 + \left(1 + \frac{3C}{\omega^2}\right)\delta u^2 = \delta\mathcal{A}. \tag{44}$$

Pero la expresión explícita para ω^2 era

$$\omega^2 = \frac{k}{r_0^3} + C, \tag{45}$$

de modo que, en definitiva, recordando la definición $\lambda = Cr_0^3/k$,

$$\delta u'^2 + \frac{1+4\lambda}{1+\lambda}\,\delta u^2 = \delta\mathcal{A}. \tag{46}$$

De aquí leemos que

$$\delta u(\varphi) = \delta u_0 \cos(\omega_u \varphi + \mathcal{B}), \tag{47}$$

donde

$$\omega_u = \sqrt{\frac{1+4\lambda}{1+\lambda}}. \tag{48}$$

Finalmente, para la órbita levemente perturbada resulta

$$\frac{1}{r}(\varphi) \simeq \frac{1}{r_0} + \delta u_0 \cos(\omega_u \varphi + \mathcal{B}). \tag{49}$$

Esta es la ecuación de una elipse en precesión. Debemos compararla con la ec. (31),

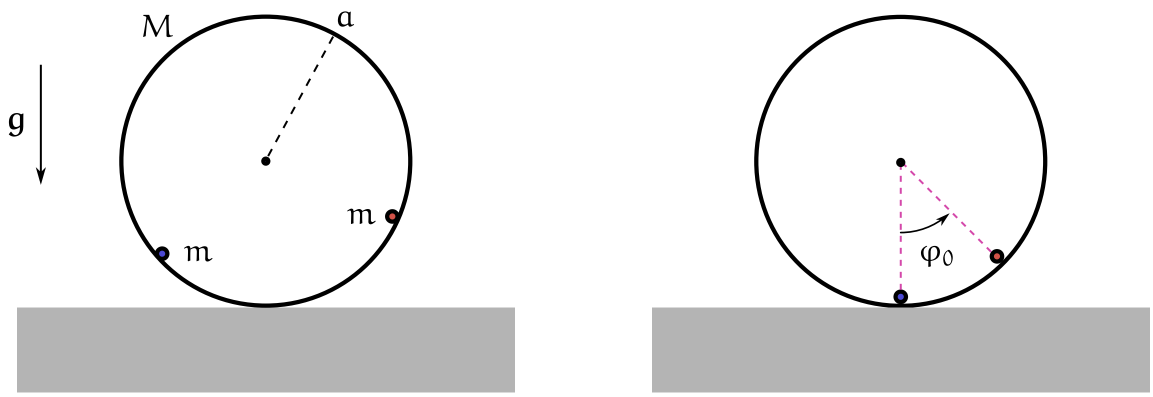
$$\frac{1}{r}(\varphi) \simeq \frac{1}{r_0} - \frac{\delta r_0}{r_0^2}\cos\left(\frac{\Omega_r}{\omega}\varphi + \alpha_0\right). \tag{50}$$

A partir de las expresiones dadas por la ec. (34),

$$\frac{\Omega_r}{\omega} = \sqrt{\frac{1+4\lambda}{1+\lambda}}, \tag{51}$$

que es igual a ω_u. Vemos entonces que hay acuerdo entre los dos métodos.

■ **Problema 3**. Un aro de radio a y masa M rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. Dos partículas de masa m pueden deslizarse a lo largo del aro, de tal manera que pueden cruzarse entre sí sin chocar. Hay gravedad.



a) Elija coordenadas generalizadas y escriba el lagrangiano del sistema.

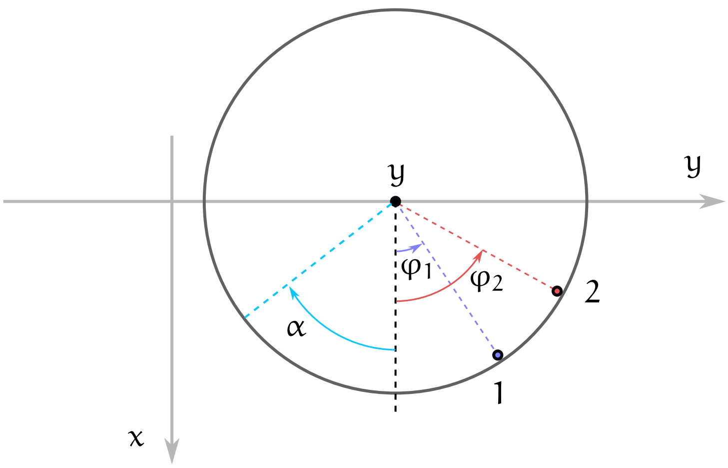
b) Elija una configuración de equilibrio estable y escriba el lagrangiano de pequeñas oscilaciones en ese caso.

c) Encuentre las frecuencias, modos y coordenadas normales.

d) Grafique esquemáticamente los modos normales.

e) Siempre respecto al problema de pequeñas oscilaciones, escriba la solución para la siguiente condición inicial: las masas y el aro están en reposo y una de las masas parte formando un ángulo φ_0 con la vertical, como muestra la figura de la derecha.

■ **Solución**. a) Elegimos los ejes y las coordenadas como en la figura.



Notar que definimos α como positivo si el movimiento del aro es hacia la derecha.

En términos de las coordenadas y, φ_1 y φ_2, las posiciones de las partículas son

$$\mathbf{r}_1(y, \varphi_1) = y\,\hat{y} + a\,\hat{\rho}(\varphi_1), \qquad \mathbf{r}_2(y, \varphi_2) = y\,\hat{y} + a\,\hat{\rho}(\varphi_2), \tag{52}$$

y sus velocidades,

$$\boldsymbol{v}_1 = \dot{y}\,\hat{y} + a\dot{\varphi}_1\,\hat{\varphi}(\varphi_1), \qquad \boldsymbol{v}_2 = \dot{y}\,\hat{y} + a\dot{\varphi}_2\,\hat{\varphi}(\varphi_2). \tag{53}$$

La energía cinética de las dos partículas es

$$T_{\text{part}} = \tfrac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) = \tfrac{1}{2}m\big[2\dot{y}^2 + a^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + 2a\dot{y}(\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\cos\varphi_2)\big], \tag{54}$$

y su energía potencial,

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = -mg\big[x_1(\varphi_1) + x_2(\varphi_2)\big] = -mga(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2). \tag{55}$$

El centro del aro está en $\mathbf{r}_0 = y\,\hat{y}$ y su ángulo de rotación es $\alpha = y/a$. Luego,

$$T_{\text{aro}} = \tfrac{1}{2}M\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2}Ma^2\dot{\alpha}^2 = M\dot{y}^2. \tag{56}$$

Reuniendo todos los resultados, el lagrangiano para las coordenadas y, φ_1 y φ_2 es

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\big[2(M+m)\dot{y}^2 + ma^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + 2ma\dot{y}(\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\cos\varphi_2)\big] + mga(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2). \tag{57}$$

Para trabajar con un lagrangiano más simple, dividamos $\mathcal{L}$ por ma^2 e introduzcamos las cantidades $\omega_0^2 = g/a$ y $\mu = M/m$. Al dividir por a^2 volverá a aparecer el ángulo α, así que sustituiremos la coordenada generalizada y por α. Entonces resulta (conservando el mismo símbolo $\mathcal{L}$)

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\big[2(\mu+1)\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\alpha}(\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\cos\varphi_2)\big] + \omega_0^2(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2). \tag{58}$$

Aún podríamos dividir a $\mathcal{L}$ por ω_0^2 e introducir una variable adimensional $\tau = \omega_0 t$, de tal manera que todo fuera adimensional. Eso sería muy práctico para hacer una simulación.

b) Como configuración de equilibrio estable tomamos $\alpha = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Las coordenadas de pequeñas oscilaciones serán los propios ángulos. Aproximando los cosenos por 1 en la energía cinética y por su desarrollo hasta segundo orden en la energía potencial, el lagrangiano de pequeñas oscilaciones es

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \tfrac{1}{2}\big[2(\mu+1)\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\alpha}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\big] - \tfrac{1}{2}\omega_0^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \tag{59}$$

c–d) Definamos el vector

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Podemos escribir el lagrangiano de pequeñas oscilaciones en forma matricial como

$$\mathcal{L}_{\text{osc}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \tfrac{1}{2}\,\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbb{M}\cdot\dot{\mathbf{x}} - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}\cdot\mathbb{V}\cdot\mathbf{x}, \tag{61}$$

donde la matriz energía cinética es

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 2(\mu+1) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{62}$$

y la matriz energía potencial,

$$\mathbb{V} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Si buscamos soluciones $\mathbf{x} = e^{i\omega t}\mathbf{A}$, debemos pedir que $\det(\omega^2\mathbb{M} - \mathbb{V}) = 0$. Definiendo

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \tag{64}$$

queda la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} 2(\mu+1)\lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = 0. \tag{65}$$

La ecuación característica es

$$\lambda(\lambda-1)\big[2(\mu+1)(\lambda-1) - 2\lambda\big] = 0. \tag{66}$$

Las raíces son

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = \frac{\mu+1}{\mu}. \tag{67}$$

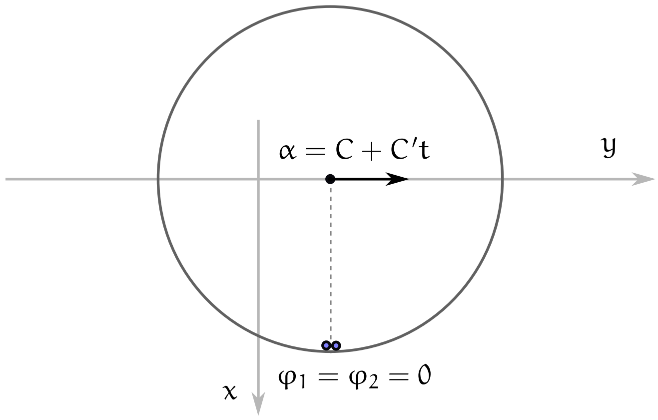
Por lo tanto, las frecuencias normales valen

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \omega_0, \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu}}\,\omega_0. \tag{68}$$

Los autovectores correspondientes son

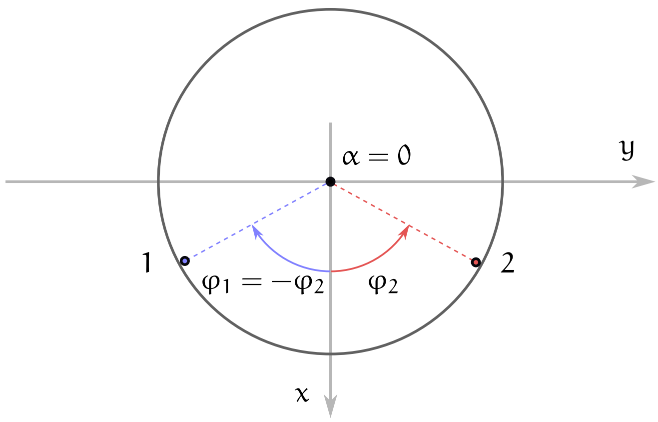
$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu-1 \\ -\mu-1 \end{pmatrix}. \tag{69}$$

El primer modo no corresponde estrictamente a una oscilación, sino a una traslación del aro y de las dos partículas con velocidad constante, con las dos partículas en la parte más baja del aro, como muestra la figura.



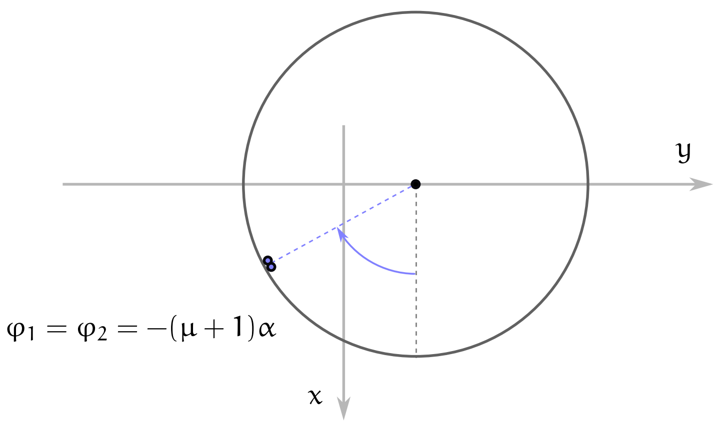
$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = (c + c't)\mathbf{A}_1. \tag{70}$$

El segundo modo corresponde al aro en reposo y a las dos partículas oscilando en contrafase y con amplitudes de igual módulo. La existencia de este modo es evidente por simetría.



$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = c\cos(\omega_0 t + c')\,\mathbf{A}_2. \tag{71}$$

El tercer modo corresponde a una oscilación en contrafase del aro y de las dos partículas, en donde las dos partículas están en la misma posición ($\varphi_1 = \varphi_2$).



$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = c\cos(\omega_3 t + c')\,\mathbf{A}_3. \tag{72}$$

Para calcular las coordenadas normales convendrá normalizar los autovectores. De paso verificamos que sean ortogonales. Lo más práctico es calcular primero el producto escalar de $\mathbb{M}$ con cada autovector,

$$\mathbb{M}\cdot\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2(\mu+1) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{M}\cdot\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{M}\cdot\boldsymbol{A}_3 = -\begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}. \tag{73}$$

En efecto, $\boldsymbol{A}_i\cdot\mathbb{M}\cdot\boldsymbol{A}_j \propto \delta_{ij}$. Los autovectores normalizados son

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\boldsymbol{A}_1}{\sqrt{\boldsymbol{A}_1\cdot\mathbb{M}\cdot\boldsymbol{A}_1}} = \frac{1}{\sqrt{2(\mu+1)}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{74}$$

$$\mathbf{X}_2 = \frac{\boldsymbol{A}_2}{\sqrt{\boldsymbol{A}_2\cdot\mathbb{M}\cdot\boldsymbol{A}_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{75}$$

$$\mathbf{X}_3 = \frac{\boldsymbol{A}_3}{\sqrt{\boldsymbol{A}_3\cdot\mathbb{M}\cdot\boldsymbol{A}_3}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu(\mu+1)}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mu-1 \\ -\mu-1 \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Las coordenadas normales se obtienen como $\xi_i = \mathbf{X}_i\cdot\mathbb{M}\cdot\boldsymbol{x}$. Lo más cómodo es primero calcular $\mathbb{M}\cdot\boldsymbol{x}$,

$$\mathbb{M}\cdot\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2(\mu+1)\alpha+\varphi_1+\varphi_2 \\ \alpha+\varphi_1 \\ \alpha+\varphi_2 \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Luego resulta

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2(\mu+1)}}\Big[2(\mu+1)\alpha+\varphi_1+\varphi_2\Big], \tag{78}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1-\varphi_2), \tag{79}$$

$$\xi_3 = -\frac{\mu}{\sqrt{2\mu(\mu+1)}}(\varphi_1+\varphi_2). \tag{80}$$

e) La solución general del problema de pequeñas oscilaciones es

$$\mathbf{x}(t) = (C_1 + C_1' t)\mathbf{A}_1 + (C_2 \cos\omega_0 t + C_2' \sin\omega_0 t)\mathbf{A}_2 + (C_3 \cos\omega_3 t + C_3' \sin\omega_3 t)\mathbf{A}_3. \tag{81}$$

Elegimos expresar esta solución en términos de los autovectores sin normalizar porque resulta más práctico ajustar las constantes escribiendo directamente las ecuaciones para $t = 0$ que aplicando ortonormalidad. Evaluando la expresión anterior en $t = 0$, obtenemos

$$\mathbf{x}(0) = C_1\mathbf{A}_1 + C_2\mathbf{A}_2 + C_3\mathbf{A}_3. \tag{82}$$

Puesto que $\alpha(0) = \varphi_1(0) = 0$ y $\varphi_2(0) = \varphi_0$, resultan las siguientes tres ecuaciones

$$C_1 + C_3 = 0, \tag{83}$$

$$C_2 - (\mu + 1)C_3 = 0, \tag{84}$$

$$C_2 + (\mu + 1)C_3 = -\varphi_0. \tag{85}$$

De manera inmediata hallamos

$$C_1 = \frac{\varphi_0}{2(\mu+1)}, \qquad C_2 = -\frac{\varphi_0}{2}, \qquad C_3 = -\frac{\varphi_0}{2(\mu+1)}. \tag{86}$$

En un problema más complicado o si resolviésemos esto en la computadora, siempre podemos encontrar estas contantes como

$$C_i = \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}(0)}{\mathbf{A}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}_i}. \tag{87}$$

Si en lugar de usar los $\mathbf{A}_i$, a la solución la hubiéramos construido como una combinación lineal de los $\mathbf{X}_i$, hubiera bastado con calcular $\mathbf{X}_i \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}(0)$.

La condición inicial para las velocidades se escribe como

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = C_1'\mathbf{A}_1 + \omega_0 C_2'\mathbf{A}_2 + \omega_3 C_3'\mathbf{A}_3. \tag{88}$$

Pero, debido a que $\dot{\mathbf{x}}(0)$ es el vector nulo y a que los tres autovectores son linealmente independientes, las tres constantes C_i' deben ser cero. Reemplazando en la expresión (81),

$$\alpha(t) = \frac{\varphi_0}{2(\mu+1)}(1 - \cos\omega_3 t), \tag{89}$$

$$\varphi_1(t) = -\frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_0 t - \cos\omega_3 t), \tag{90}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_0 t + \cos\omega_3 t). \tag{91}$$

■ Como ejercicio extra podrían analizar las constantes de movimiento en este sistema. Algo que pueden verificar rápidamente para la solución anterior es que el centro de masa, aunque tiene velocidad inicial igual a cero, ¡oscila horizontalmente! La velocidad horizontal del centro de masa no es una constante de movimiento. ¿Entonces qué es lo que se conserva?