

Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021.
El lagrangiano según distintos sistemas de referencia.*

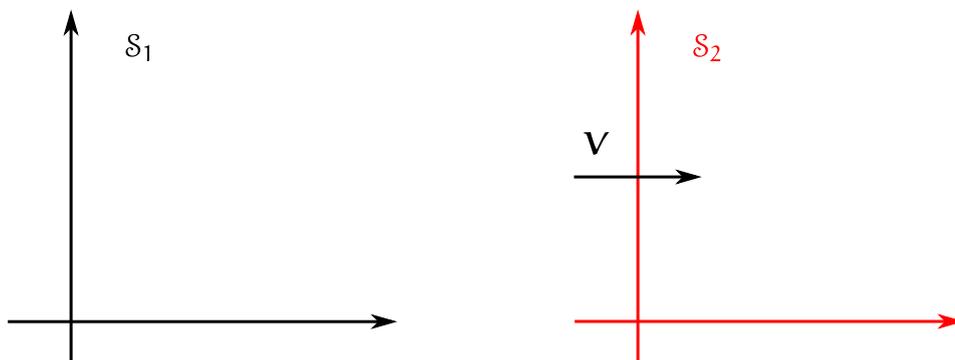
Es importante distinguir entre sistemas de referencia (que pueden ser inerciales o no) y conjuntos de coordenadas generalizadas. No existe tal cosa como un conjunto de coordenadas generalizadas no inerciales. Lo que sí existe son coordenadas generalizadas cuya elección es natural en sistemas de referencia no inerciales. El punto central de estas notas es que para obtener las ecuaciones de movimiento en un sistema de referencia no inercial, hay que escribir el lagrangiano en un sistema de referencia inercial usando como conjunto de coordenadas generalizadas aquellas que sean las coordenadas naturales para el sistema de referencia no inercial. La alternativa, que consiste en escribir un lagrangiano en el sistema de referencia no inercial, es mucho más complicada, porque debe incluir las fuerzas inerciales.

■ La forma del lagrangiano depende de dos cosas:

1. Del sistema de referencia respecto al cual se refieren las velocidades y las fuerzas sobre las partículas.
2. De las coordenadas elegidas para representar las posiciones de las partículas.

Si el sistema de referencia es no inercial, se deben incluir las fuerzas de inercia. Lo que es importante notar es que pueden usarse las mismas coordenadas generalizadas para escribir los lagrangianos asociados a dos sistemas de referencia diferentes.

Analicemos el caso más simple: dos sistemas inerciales en movimiento relativo según el eje x . El sistema \mathcal{S}_2 se mueve con velocidad $\mathbf{V} = v \hat{x}$ respecto del sistema \mathcal{S}_1 . Sus orígenes coinciden en $t = 0$ y sus ejes son paralelos.



Situémonos primero en el sistema \mathcal{S}_1 . Vamos a tratar de escribir el lagrangiano de una partícula según el sistema de referencia \mathcal{S}_1 usando las coordenadas cartesianas x_1 e y_1 definidas en relación a ese sistema.

*zanellaj@df.uba.ar

La posición y la velocidad de la partícula son

$$\mathbf{r} = x_1 \hat{x} + y_1 \hat{y}, \quad (1)$$

$$\mathbf{v} = \dot{x}_1 \hat{x} + \dot{y}_1 \hat{y}. \quad (2)$$

La energía cinética es

$$T_1 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2). \quad (3)$$

El lagrangiano sería

$$\mathcal{L}_1(x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) - V_1(x_1, y_1). \quad (4)$$

El potencial V_1 tiene que ser dato

Ahora escribiremos el lagrangiano en el sistema S_2 usando las mismas coordenadas generalizadas (prestar atención aquí). La posición de la partícula en el sistema S_2 en términos de x_1 y y_1 está dada por la regla de composición de vectores

$$\mathbf{r}_2 = (x_1 - vt) \hat{x} + y_1 \hat{y}. \quad (5)$$

Estamos en el sistema S_2 pero usamos las coordenadas cartesianas de la partícula en el sistema S_1 . Nada impide hacer eso. La demostración es que podemos saber perfectamente cuál es la posición de la partícula en S_2 conociendo x_1 y y_1 (y el tiempo). Para escribir el lagrangiano en S_2 es fundamental calcular la velocidad de la partícula en ese sistema. Resulta

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = (\dot{x}_1 - v) \hat{x} + \dot{y}_1 \hat{y}. \quad (6)$$

La energía cinética es entonces

$$T_2 = \frac{1}{2} m [(\dot{x}_1 - v)^2 + \dot{y}_1^2]. \quad (7)$$

Luego, el lagrangiano según S_2 usando como coordenadas generalizadas x_1 y y_1 sería

$$\mathcal{L}_2(x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, t) = \frac{1}{2} m [(\dot{x}_1 - v)^2 + \dot{y}_1^2] - V_2(x_1 - vt, y_1). \quad (8)$$

La relación entre el potencial en el sistema S_1 y el potencial en el sistema S_2 tiene que venir de otro lado. Si uno usa la invariancia de la fuerza frente a transformaciones de Galileo, entonces

$$V_1(x_1, y_1) = V_2(x_1 - vt, y_1). \quad (9)$$

Así tenemos lagrangianos asociados a dos sistemas de referencia inerciales que usan las mismas coordenadas generalizadas. Puesto que en última instancia ambos lagrangianos generan ecuaciones de movimiento para las mismas coordenadas, deberían verificar que tanto \mathcal{L}_1 como \mathcal{L}_2 dan las mismas ecuaciones de movimiento para x_1 y y_1 .

Obviamente, si en \mathcal{S}_2 usáramos las coordenadas cartesianas asociadas a ese sistema, obtendríamos otro lagrangiano

$$\tilde{\mathcal{L}}_2(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, t) = \frac{1}{2}m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - V_2(x_2, y_2). \quad (10)$$

El lagrangiano \mathcal{L}_1 está ligado al sistema de referencia \mathcal{S}_1 y usa como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas de \mathcal{S}_1 . El lagrangiano \mathcal{L}_2 está ligado al sistema de referencia \mathcal{S}_2 y usa las mismas coordenadas generalizadas que el anterior. En cambio $\tilde{\mathcal{L}}_2$ está ligado a \mathcal{S}_2 y usa un conjunto diferente de coordenadas generalizadas: las coordenadas cartesianas asociadas a \mathcal{S}_2 . También podríamos escribir un lagrangiano $\tilde{\mathcal{L}}_1$ que esté ligado a \mathcal{S}_1 pero que use como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas asociadas a \mathcal{S}_2 .

Aquí todo fue sencillo porque ambos sistemas eran inerciales, y entonces no fue necesario incluir potenciales (o llegado el caso, fuerzas) asociadas al carácter no inercial de los sistemas. Para ver qué pasa cuando queremos escribir un lagrangiano en un sistema no inercial, usemos como ejemplo un sistema inercial \mathcal{S}_1 y un sistema no inercial \mathcal{S}_2 provistos de coordenadas cartesianas, con sus ejes paralelos y tales que el origen de \mathcal{S}_2 se mueve con aceleración uniforme a en la dirección x (los orígenes coinciden en $t = 0$). Para simplificar las cosas aún más, todo lo que hay es una partícula libre de masa m . Lo que queremos mostrar es que no podemos escribir el lagrangiano asociado a \mathcal{S}_2 si no tenemos en cuenta las fuerzas inerciales.

Estamos seguros de cómo funcionan las cosas en \mathcal{S}_1 . Ahí podemos usar las coordenadas cartesianas asociadas a \mathcal{S}_1 o a \mathcal{S}_2 . Serán dos lagrangianos diferentes. El primero será el lagrangiano usual de partícula libre

$$\mathcal{L}_1(x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, t) = \frac{1}{2}m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2), \quad (11)$$

que dará las ecuaciones habituales

$$m\ddot{x}_1 = 0, \quad (12)$$

$$m\ddot{y}_1 = 0. \quad (13)$$

La segunda elección de coordenadas es más interesante. La posición del origen del sistema \mathcal{S}_2 en función del tiempo es $Y = 0$ y

$$X(t) = \frac{1}{2}at^2. \quad (14)$$

Por lo tanto si queremos escribir la posición de la partícula en el sistema S_1 en términos de las coordenadas cartesianas del sistema S_2 , todo lo que tenemos que escribir es

$$x_1 = x_2 + X(t) = x_2 + \frac{1}{2}at^2, \quad (15)$$

$$y_1 = y_2. \quad (16)$$

La velocidad de la partícula en S_1 será

$$\mathbf{v}_1 = \dot{x}_1 \hat{x} + \dot{y}_1 \hat{y} = (\dot{x}_2 + at) \hat{x} + \dot{y}_2 \hat{y}. \quad (17)$$

Su energía cinética

$$T_1 = \frac{1}{2}m[(\dot{x}_2 + at)^2 + \dot{y}_2^2]. \quad (18)$$

Como la partícula es libre $V = 0$. Luego, el lagrangiano en estas coordenadas y en este sistema coincide con la energía cinética

$$\tilde{\mathcal{L}}_1(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, t) = \frac{1}{2}m[(\dot{x}_2 + at)^2 + \dot{y}_2^2]. \quad (19)$$

Usamos una notación distinta para este lagrangiano porque no es la misma función de antes. Son \mathcal{L}_1 y $\tilde{\mathcal{L}}_1$. Este último, que no tiene nada de especial, es un lagrangiano asociado al sistema S_1 pero donde se usan como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas del sistema S_2 .

Veamos cuáles son las ecuaciones de movimiento. Tenemos que escribir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_1}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_1}{\partial x_2} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_1}{\partial \dot{y}_2} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_1}{\partial y_2} = 0. \quad (21)$$

La segunda ecuación es poco interesante; simplemente da $m\ddot{y}_2 = 0$. Ahora bien, la primera ecuación se escribe como

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_2 + at) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_2 = -a. \quad (22)$$

Lo interesante de esto es que, sin movernos de S_1 , estamos obteniendo las ecuaciones de movimiento escritas según las coordenadas que se usarían en el sistema de referencia no inercial S_2 . En ese sistema todas las partículas sienten una fuerza $\mathbf{F} = -ma \hat{x}$, porque el sistema está acelerado.

La enseñanza de esto es que para obtener las ecuaciones de movimiento en un sistema no inercial no es necesario escribir el lagrangiano en ese sistema. Basta elegir un sistema

inercial pero usar como coordenadas generalizadas las coordenadas que se usarían naturalmente en el sistema no inercial.

Por contraste, si hubiéramos querido escribir un lagrangiano en el sistema acelerado S_2 , tendríamos que haber incluido los potenciales asociados a las fuerzas inerciales. En el sistema S_2 la posición de la partícula es

$$\mathbf{r}_2 = x_2 \hat{x} + y_2 \hat{y}. \quad (23)$$

Su velocidad

$$\mathbf{v}_2 = \dot{x}_2 \hat{x} + \dot{y}_2 \hat{y}. \quad (24)$$

Su energía cinética

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2). \quad (25)$$

Si no incluyéramos ningún potencial asociado a la fuerza de inercia debida a la aceleración, el lagrangiano (incorrecto) sería

$$\mathcal{L}_2(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2), \quad (26)$$

del cual se deduce la ecuación de movimiento (incorrecta)

$$\ddot{x}_2 = 0. \quad (27)$$

Sabemos que esta ecuación no es válida porque antes tuvimos la precaución de trabajar en un sistema inercial, donde estábamos seguros de lo que hacíamos, y lo que obtuvimos fue la ecuación (22). Lo que falta incluir en el lagrangiano \mathcal{L}_2 para que dé la ecuación de movimiento correcta en la dirección x es un potencial de tipo gravitatorio, de forma de generar una fuerza constante. Es decir, falta incluir un término potencial de la forma

$$V_2(x_2, y_2) = m a x_2. \quad (28)$$

En S_2 las partículas tienden a “caer” en la dirección del eje x , como si hubiera gravedad apuntando en la dirección $-\hat{x}$. Eso es lo que indica cuál es el signo correcto del potencial. El potencial tiene que disminuir al disminuir x_2 , porque las partículas tienden a moverse hacia valores cada vez menores de x_2 .

Si incluimos el potencial V_2 en el lagrangiano que asociamos al sistema no inercial S_2 , entonces tendremos

$$\mathcal{L}_2(x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m a x_2. \quad (29)$$

De este lagrangiano resulta la ecuación de movimiento correcta

$$\ddot{x}_2 = -a. \quad (30)$$

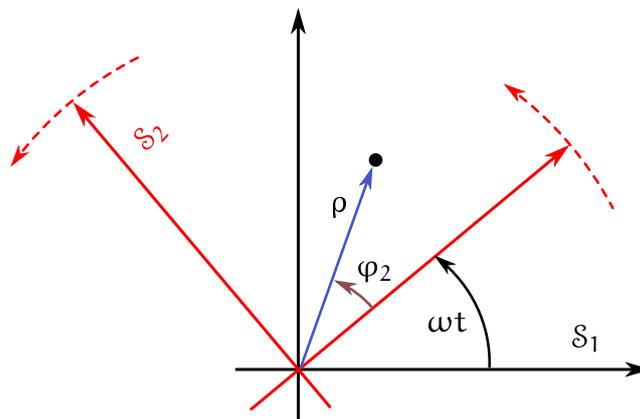
En resumen: ¿qué entendemos por obtener las ecuaciones de movimiento en un sistema no inercial? Una respuesta sencilla sería decir: encontrar las ecuaciones diferenciales que satisfacen las coordenadas que naturalmente usaría un observador en ese sistema para describir las posiciones de las partículas. Para eso no necesitamos escribir un lagrangiano asociado al sistema no inercial. Alcanza con situarnos en un sistema de referencia inercial y en escribir todas las posiciones usando como coordenadas generalizadas las coordenadas naturales del sistema de referencia no inercial. Así obtenemos ecuaciones diferenciales para esas coordenadas.

El camino alternativo es mucho más complicado. Consiste en escribir un lagrangiano adecuado al sistema de referencia no inercial. Para movimientos simples, como aceleraciones uniformes o rotaciones uniformes, disponemos de potenciales que generan las fuerzas de inercia. Pero para movimientos arbitrarios habrá que encontrar las fuerzas generalizadas y usar la versión primitiva de las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \quad (31)$$

Es mucho más sencillo el primer camino, donde las fuerzas no inerciales aparecen naturalmente.

Para ilustrarlo con otro ejemplo: supongamos un sistema de referencia inercial S_1 y un sistema de referencia rotante S_2 , como muestra la figura.



A cada sistema se le han asignado ejes cartesianos. Supongamos que sólo haya una partícula libre. Si queremos obtener las ecuaciones de movimiento en el sistema no inercial S_2 , no tenemos porqué escribir un lagrangiano asociado a este sistema. Lo más sencillo es escribir un lagrangiano asociado al sistema S_1 , usando como coordenadas generalizadas las coordenadas que naturalmente elegiría un observador en reposo en S_2 . En la figura se muestran coordenadas polares. El observador que está en reposo en S_2 usaría como

coordenada natural para describir la posición de la partícula el ángulo φ_2 . Nuestro objetivo es escribir un lagrangiano en \mathcal{S}_1 usando como coordenada generalizada φ_2 . Así que todo el trabajo estará puesto en escribir la posición de la partícula en \mathcal{S}_1 en términos de φ_2 . Al calcular las ecuaciones de movimiento, las fuerzas inerciales aparecerán por sí solas. Los detalles quedan como ejercicio.