



Las dos caras del cálculo variacional

Los problemas de cálculo variacional que van a encontrar en la guía son de dos clases. En unos, se aplican las herramientas del cálculo variacional para resolver problemas de mecánica. En otros, se aplican técnicas del formalismo lagrangiano para resolver problemas de cálculo variacional. Por ejemplo, encontrar la trayectoria de una partícula en un potencial anarmónico minimizando la acción dentro de cierta clase de funciones es un ejemplo que usa métodos de cálculo variacional para resolver un problema de mecánica clásica. En contraste, hallar la curva de longitud extremal que une dos puntos sobre una superficie es un problema de cálculo variacional en donde pueden emplearse métodos de la mecánica clásica.

En la clase teórica han visto que el problema de extremar funcionales de la forma

$$I[y] = \int_a^b dx \mathcal{L}(y(x), y'(x), x) \quad (1)$$

conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

*zanellaj@df.uba.ar

Esto puede darles la impresión de que no hay nada nuevo en el cálculo variacional, y que todo se reduce a resolver ecuaciones de Euler-Lagrange. Lo cierto es que las ecuaciones de Euler-Lagrange son apenas un ejemplo dentro de una gran colección de métodos de los que dispone el cálculo variacional, sobre todo en lo que respecta a métodos de aproximación. A veces es más práctico usar esos otros métodos del cálculo variacional que plantear las ecuaciones de Euler-Lagrange, sobre todo cuando encontrar una solución exacta está más allá de nuestras posibilidades.

Desde un punto de vista práctico, considerar un problema mecánico como un problema variacional, no es estrictamente equivalente a resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange. El cálculo variacional tiene muchas otras herramientas. Haber encontrado una relación entre las ecuaciones de Euler-Lagrange y un principio variacional pone a nuestra disposición todas esas herramientas.

¿Cuáles son estas herramientas del cálculo variacional que prescinden de las ecuaciones de Euler-Lagrange? Ya que esta es la pregunta que posiblemente despierte más curiosidad, el primer ejemplo que veremos corresponde a esta clase de cuestiones.

Cálculo variacional sin ecuaciones de Euler-Lagrange

■ **Problema 8.** Cuando se arroja un objeto hacia arriba, desde la superficie terrestre y con velocidad inicial v_0 , el tiempo que transcurre hasta que vuelve a tocar tierra resulta $t_c = 2v_0/g$. A partir de una función de prueba dada por

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right], \quad (3)$$

con $\omega = 2\pi/t_c$, encuentre la mejor aproximación a la trayectoria con el criterio del principio de Hamilton. Compare la solución obtenida con la correspondiente al resultado $y(t) = v_0 t - gt^2/2$.

■ **Solución.** Se trata de hallar la trayectoria de una partícula que se mueve sobre el eje y bajo la acción de la gravedad. Se asume que el movimiento ocurre entre $t = 0$ y $t_c = 2v_0/g > 0$. El problema variacional es el de encontrar la trayectoria que extrema la acción

$$I[y] = \int_0^{t_c} dt \mathcal{L}(y(t), \dot{y}(t)), \quad (4)$$

sujeta a las condiciones $y(0) = y(t_c) = 0$.

Sabemos que la solución del problema variacional puede darse a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange. En este caso todo eso es trivial. El lagrangiano es

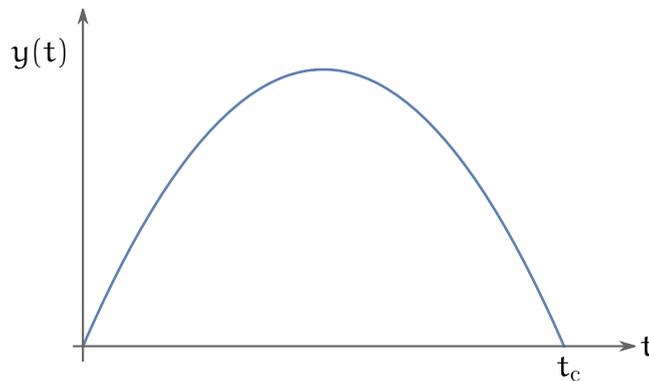
$$\mathcal{L}(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy, \quad (5)$$

lo que implica

$$\ddot{y} = -g \Rightarrow y(t) = a + bt - \frac{g}{2}t^2. \quad (6)$$

Si la partícula parte del origen a tiempo $t = 0$ y regresa a tiempo t_c , encontramos

$$a = 0, \quad b = \frac{gt_c}{2}, \quad y(t) = \frac{gt_c t}{2} - \frac{g}{2}t^2. \quad (7)$$



La idea del problema no es usar las ecuaciones de Euler-Lagrange, sino buscar de modo directo la función que extrema la acción bajo las condiciones de contorno dadas. Queremos resolver la ecuación

$$\delta I[y] = 0, \quad (8)$$

con $y(0) = y(t_c) = 0$. El método que se propone en el enunciado es un *método directo*. En esta clase de métodos, se busca extremar la acción restringida a una determinada familia de funciones. En cierto sentido, la solución encontrada corresponderá a la mejor aproximación posible dentro de la clase de funciones consideradas. Por eso el enunciado habla de encontrar *la mejor aproximación*. Veremos, sin embargo, que en este ejemplo la clase de funciones consideradas es tan amplia que la mejor aproximación coincidirá con el resultado exacto. El método funciona tan bien debido a que el potencial es muy sencillo. No esperen extenderlo fácilmente a casos más generales.

Una forma de definir una clase de funciones es mediante un conjunto de parámetros $\{c_n\}$, del mismo modo en que ajustan una curva obtenida experimentalmente. Las funciones de esta clase serán de la forma

$$y(t, \{c_n\}). \quad (9)$$

Dependen del tiempo pero también del conjunto $\{c_n\}$ de parámetros. A fin de cuentas, la acción, restringida a esta clase de funciones, será una función ordinaria de un conjunto posiblemente infinito pero numerable de variables:

$$I[y(t, \{c_n\})] = I(\{c_n\}). \quad (10)$$

Las variaciones de la acción se logran variando los parámetros c_n . Extremar la acción significa encontrar el conjunto $\{c_n\}$ de parámetros tales que

$$\frac{\partial I(\{c_n\})}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (11)$$

En nuestro caso, estamos proponiendo una parametrización de la forma

$$y(t, \{c_n\}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right], \quad (12)$$

de modo que el conjunto $\{c_n\}$ de parámetros está formado por a_0 y los a_n y b_n con $n \geq 1$. Prescindiendo del factor m , la acción se calcula como

$$I(\{c_n\}) = \int_0^{t_c} dt \left[\frac{1}{2} \dot{y}(t, \{c_n\})^2 - gy(t, \{c_n\}) \right]. \quad (13)$$

Las funciones de prueba también deben satisfacer las condiciones de contorno,

$$y(0, \{c_n\}) = y(t_c, \{c_n\}) = 0. \quad (14)$$

Puesto que $\omega = 2\pi/t_c$, las funciones $\sin(n\omega t)$ se anulan en ambos extremos, y las funciones $\cos(n\omega t)$ valen 1. En definitiva, ambas condiciones de contorno implican el siguiente vínculo entre los coeficientes:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0. \quad (15)$$

Esto termina de definir el espacio de las funciones de prueba.

El cálculo de la acción como función de los infinitos parámetros c_n consiste en la evaluación de la expresión (13) para la función de prueba (12). Es un cálculo sencillo que aprovecha las propiedades de ortogonalidad de las funciones de la base de Fourier

$$\{\cos(n\omega t), \sin(n\omega t)\}. \quad (16)$$

Empecemos por calcular la parte más difícil,

$$\int_0^{t_c} dt \frac{1}{2} \dot{y}(t, \{c_n\})^2. \quad (17)$$

En primer lugar,

$$\dot{y}(t, \{c_n\}) = \omega \sum_{n=1}^{\infty} n \left[-a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t) \right]. \quad (18)$$

Luego,

$$\dot{y}(t, \{c_n\})^2 = \omega^2 \sum_{n,k=1}^{\infty} nk \left[-a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t) \right] \left[-a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t) \right]. \quad (19)$$

Al reemplazar en la integral (17), aparecerán tres tipos de términos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_c} dt \sin(n\omega t) \sin(k\omega t), \\ & \int_0^{t_c} dt \sin(n\omega t) \cos(k\omega t), \\ & \int_0^{t_c} dt \cos(n\omega t) \cos(k\omega t). \end{aligned} \quad (20)$$

Uno debería saber que la segunda expresión es siempre cero, y que las otras dos son distintas de cero únicamente cuando $n = k$ (estamos asumiendo que tanto n y k son mayores o iguales que 1). Es cierto que uno puede no recordar cuánto valen esas integrales cuando $n = k$, pero sí debe recordar que sólo en ese caso son distintas de cero. No cuesta nada hacer el cálculo cuando $n = k$. Por ejemplo,

$$\int_0^{t_c} dt \sin^2(n\omega t) = \frac{1}{n\omega} \frac{n\omega t - \sin(n\omega t) \cos(n\omega t)}{2} \Big|_0^{t_c} = \frac{t_c}{2}. \quad (21)$$

Ya sabemos que funciones senos y cosenos integradas durante un período van a dar lo mismo, de modo que también es

$$\int_0^{t_c} dt \cos^2(n\omega t) = \frac{t_c}{2}. \quad (22)$$

Probablemente ni siquiera sea necesario que deduzcan las primitivas de las funciones $\sin^2 x$ y $\cos^2 x$, porque quizá recuerden el resultado de que el promedio de esas funciones durante un período es igual a $1/2$. Ven que todo se reduce a recordar hechos muy simples.

En definitiva, al hacer la integral (17), de la doble sumatoria (19) únicamente sobreviven los términos $\cos(n\omega t) \cos(k\omega t)$ y $\sin(n\omega t) \sin(k\omega t)$ con $n = k$:

$$\int_0^{t_c} dt \frac{1}{2} \dot{y}(t, \{c_n\})^2 = \omega^2 \frac{t_c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2). \quad (23)$$

(Tal vez el resultado les resulte familiar: es la identidad de Parseval aplicada a la función $\frac{1}{2} \dot{y}^2$). Esto da cuenta del primer término en la ec. (13),

$$I(\{c_n\}) = \int_0^{t_c} dt \left[\frac{1}{2} \dot{y}(t, \{c_n\})^2 - g y(t, \{c_n\}) \right]. \quad (24)$$

Calcular el segundo término es más fácil:

$$\int_0^{t_c} dt y(t, \{c_n\}) = \int_0^{t_c} dt \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right] \right\} = \frac{a_0}{2} t_c. \quad (25)$$

Reuniendo los dos resultados queda

$$I(\{c_n\}) = \frac{\pi^2}{t_c} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) - \frac{a_0}{2} g t_c. \quad (26)$$

Hemos usado que $\omega = 2\pi/t_c$. Recordando que existe un vínculo entre los coeficientes,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0, \quad (27)$$

podemos escribir

$$I(\{c_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\pi^2}{t_c} n^2 (a_n^2 + b_n^2) + a_n g t_c \right]. \quad (28)$$

Así, la acción es función sólo de los a_n y los b_n con $n \geq 1$. Si queremos extremarla debemos pedir que se cumplan las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial I}{\partial a_n} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_n} = 0. \quad (30)$$

Esto es

$$\frac{2\pi^2}{t_c} n^2 a_n + g t_c = 0, \quad (31)$$

$$\frac{2\pi^2}{t_c} n^2 b_n = 0. \quad (32)$$

Por lo tanto,

$$a_n = -\frac{g t_c^2}{2\pi^2 n^2}, \quad b_n = 0. \quad (33)$$

Resta evaluar a_0 ,

$$a_0 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{g t_c^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (34)$$

La última sumatoria es de muy frecuente aparición; su valor es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (35)$$

No está demás decir que, en general, para s complejo se define la función zeta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (36)$$

En definitiva

$$a_0 = \frac{gt_c^2}{6}, \quad (37)$$

y la función que hace extrema la acción dentro de la clase de funciones consideradas es

$$y(t) = \frac{gt_c^2}{2} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{t_c}\right) \right]. \quad (38)$$

No perdamos de vista que estamos resolviendo el simple problema de una partícula arrojada hacia arriba. El resultado de física elemental contra el cual debemos comparar la expresión anterior es [ec. (7)]

$$Y(t) = \frac{gt_c t}{2} - \frac{gt_c^2}{2}. \quad (39)$$

Esperamos demostrar que $y(t) = Y(t)$. Para eso escribamos

$$Y(t) = \frac{gt_c^2}{2} \left[\frac{t}{t_c} - \left(\frac{t}{t_c}\right)^2 \right]. \quad (40)$$

Comparando las expresiones (38) y (40) se trata de ver entonces si

$$x - x^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n x). \quad (?) \quad (41)$$

Ya que la expresión de la derecha es una serie de Fourier de período 1, tratemos de escribir la expresión de la izquierda en la misma forma (entendemos por esto a escribir la extensión periódica de esa expresión). Dada una función periódica $f(x)$ de período 1, su representación en serie de Fourier es de la forma

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(2\pi n x) + B_n \sin(2\pi n x) \right], \quad (42)$$

donde

$$A_n = 2 \int_0^1 dx f(x) \cos(2\pi n x), \quad B_n = 2 \int_0^1 dx f(x) \sin(2\pi n x). \quad (43)$$

(En general el factor de normalización que figura delante de las integrales es $2/T$, donde T es el período de la función; en tal caso el argumento de las funciones seno y coseno es $2\pi n x/T$). Calculemos estos coeficientes para la función $f(x) = x - x^2$. La función $f(x)$ es par respecto de $x = 1/2$. Las funciones $\sin(2\pi n x)$ son impares respecto de $x = 1/2$. Por lo tanto, todos los coeficientes B_n son nulos. (Si no están convencidos, ustedes pueden hacer las integrales). El coeficiente A_0 viene dado por

$$A_0 = 2 \int_0^1 dx (x - x^2) = \frac{1}{3}. \quad (44)$$

El resto de los coeficientes se obtienen a través las siguientes integrales:

$$\int_0^1 dx x \cos(2\pi n x) = \frac{x}{2\pi n} \sin(2\pi n x) + \frac{1}{(2\pi n)^2} \cos(2\pi n x) \Big|_0^1 = 0, \quad (45)$$

$$\int_0^1 dx x^2 \cos(2\pi n x) = \frac{x^2}{2\pi n} \sin(2\pi n x) + \frac{2x}{(2\pi n)^2} \cos(2\pi n x) - \frac{2}{(2\pi n)^3} \sin(2\pi n x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2(\pi n)^2}.$$

Finalmente, para $n \geq 1$, $A_n = -\frac{1}{(\pi n)^2}$, y entonces

$$f(x) = x - x^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n x), \quad (46)$$

verificando que la identidad (41) es cierta.

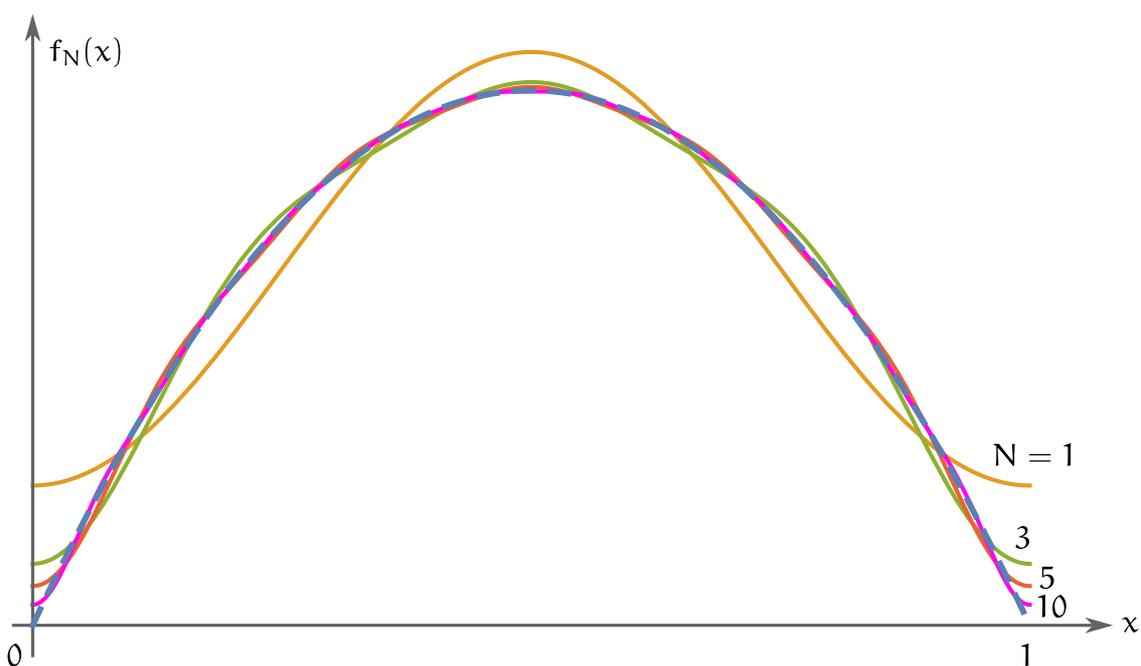
A primera vista, los términos sucesivos en la expresión

$$f(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n x) \quad (47)$$

decaen como $1/n^2$. Esto abre la posibilidad de buscar aproximaciones a la solución exacta truncando la sumatoria para un número finito de términos; digamos,

$$f(x) \simeq f_N(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n x). \quad (48)$$

Veremos que este esquema de aproximación tiene sus defectos. La figura muestra sucesivas aproximaciones, para $N = 1, 3, 5$ y 10 . En línea de trazos aparece la solución exacta.



La falla más aparente está en el hecho de que las sucesivas aproximaciones no satisfacen las condiciones de contorno, $x(0) = x(1) = 0$. Las funciones $f_N(x)$ no son funciones de prueba admisibles. Esto puede solucionarse de una manera muy expeditiva. En lugar de buscar la trayectoria dentro de la clase de funciones representables por una serie de Fourier infinita, restringimos las funciones de prueba al siguiente conjunto

$$y_N(t, \{c_n\}) = \frac{a_0^{(N)}}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n^{(N)} \cos(n\omega t) + b_n^{(N)} \sin(n\omega t) \right], \quad (49)$$

tales que $y_N(0, \{c_n\}) = y_N(t_c, \{c_n\}) = 0$. Con seguridad la solución del problema no va a pertenecer a esta clase de funciones, pero el extremo de la acción restringida a estas funciones va a dar (en algún sentido) la mejor aproximación posible a la solución exacta.

Todos los cálculos que hicimos antes siguen valiendo

$$a_n^{(N)} = a_n, \quad b_n^{(N)} = b_n, \quad n \geq 1. \quad (50)$$

La única modificación es que ahora

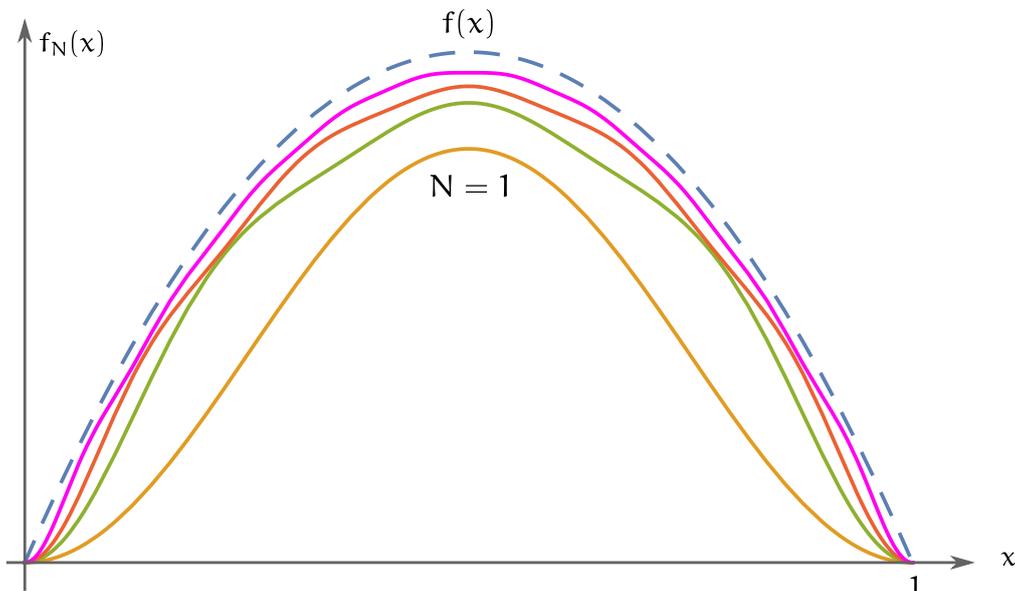
$$a_0^{(N)} = \frac{gt_c^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}. \quad (51)$$

Así, sólo tenemos que modificar el valor de a_0 en la aproximación que dimos antes.

En términos de la función adimensionalizada, ahora

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n x) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \sin^2(\pi n x). \quad (52)$$

Con esta simple modificación logramos que la aproximación satisfaga las condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = 1$. El gráfico comparativo es ahora como muestra la figura.



Las condiciones de contorno son correctas, pero la convergencia sigue siendo muy lenta y diríamos que empeoró respecto a la figura anterior. Si medimos la diferencia de precisión entre uno y otro esquema de aproximación mediante la diferencia entre el valor de la acción para la función exacta y el valor de la acción para las funciones aproximadas, ustedes pueden verificar que esa diferencia es la misma para ambos esquemas de aproximación.

■ **Ejercicio propuesto.** Para practicar estos métodos, les propongo que resuelvan el problema anterior pero usando una base diferente de funciones, los senos de frecuencia mitad:

$$W_n(t) = \sin\left(\frac{\pi n t}{t_c}\right). \quad (53)$$

Estas funciones satisfacen las condiciones de contorno $W_n(0) = W_n(t_c) = 0$. Uno puede proponer de entrada soluciones aproximadas truncando la suma desde el comienzo. Por ejemplo, podrían buscar el extremo de la acción dentro de la familia de funciones

$$y_1(t) = a_1^{(1)} \sin\left(\frac{\pi t}{t_c}\right), \quad (54)$$

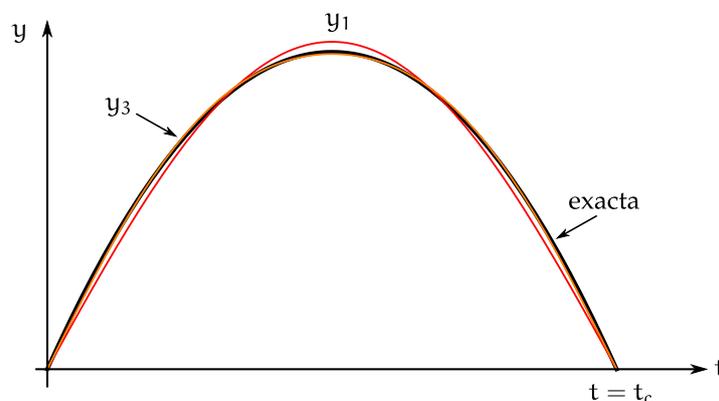
o bien

$$y_2(t) = a_1^{(2)} \sin\left(\frac{\pi t}{t_c}\right) + a_2^{(2)} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_c}\right), \quad (55)$$

o, si no,

$$y_3(t) = a_1^{(3)} \sin\left(\frac{\pi t}{t_c}\right) + a_2^{(3)} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_c}\right) + a_3^{(3)} \sin\left(\frac{3\pi t}{t_c}\right). \quad (56)$$

Notar que no estamos suponiendo que cada aproximación se construya sumándole un término a la precedente. El coeficiente que acompaña a la función $\sin(\pi t/t_c)$ en la aproximación de orden 1 no tiene por que ser igual al que aparece en la aproximación de orden 2. (De hecho, en este problema son iguales, pero no es el caso más usual). A modo de comparación con el método que vimos antes, la siguiente figura muestra las *dos* primeras aproximaciones a la solución exacta cuando se usa la base de senos de frecuencia mitad.



Ya la primera aproximación es muy superior a la lograda con la base de senos y cosenos.

Del mismo modo en que procedimos anteriormente, la circunstancia de trabajar con una base de Fourier, unida a la linealidad del potencial, permite encontrar fácilmente el desarrollo de la solución en el límite en que $N \rightarrow \infty$,

$$y_{\infty}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n t}{t_c}\right). \quad (57)$$

Hallar los coeficientes a_n extremando la acción es lo que les dejo como ejercicio: no quiero que calculen estos coeficientes a través del desarrollo de Fourier de la solución exacta. Usen eso como verificación. Los animo a publicar sus resultados en el Campus.

La mecánica clásica aplicada al cálculo variacional

El problema de la sección anterior sirvió para ilustrar uno de los dos aspectos que tiene el cálculo variacional en relación a los problemas de mecánica. Vimos con un ejemplo muy simple que, si bien el cálculo variacional conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange, no es necesario tener que trabajar al nivel de esas ecuaciones. Uno puede trabajar con el principio variacional al nivel de la integral de acción. Para eso están los métodos directos del cálculo variacional. La mecánica, en este caso, se aprovecha de las técnicas del cálculo variacional.

Lo que queremos mostrar ahora es la contracara de lo anterior. Es decir, que habiendo decidido resolver un problema variacional mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, lo que sabemos acerca de los sistemas mecánicos, en especial sobre las leyes de conservación, puede guiar la solución del problema matemático. En este caso, la matemática se aprovecha de las técnicas de la mecánica clásica. Es un ejemplo de física aplicada a las matemáticas. Más generalmente, es la propia naturaleza la que se encarga de resolver multitud de problemas variacionales (un ejemplo, las películas jabonosas como superficies de área mínima para un dado contorno).

En la clase teórica se mencionaron varios problemas paradigmáticos del cálculo variacional: las curvas de longitud extremal, el problema de la braquistócrona, el problema isoperimétrico, el principio de Fermat, etc. La guía que usan en el turno de la mañana tiene algunos problemas de este tipo que no figuran en nuestra guía. Así que ahí tienen más material de práctica. Consulten además las guías de otros cuatrimestres y también, por ejemplo, los problemas de final de capítulo de las tres ediciones del libro de Goldstein.

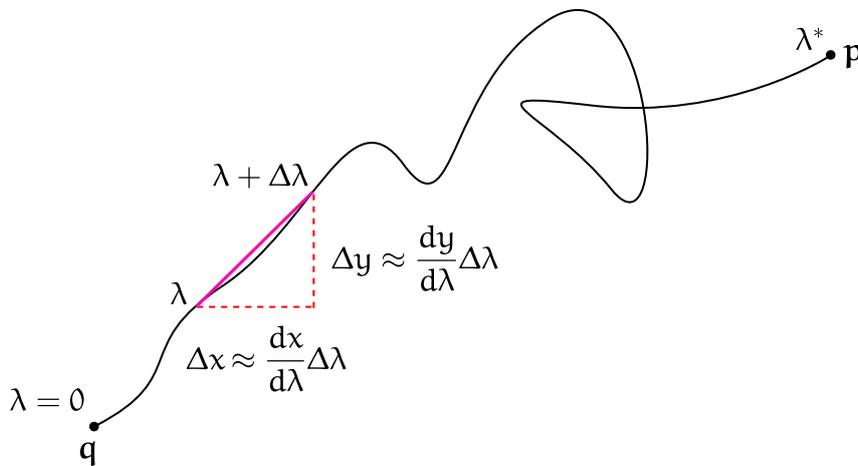
Ahora vamos a ver, como ejemplo de la aplicación de la mecánica clásica a un problema matemático, el problema de la longitud extremal de las trayectorias que unen dos puntos de una superficie. Ejemplos de tales superficies son los planos, las esferas, los hiperboloides, toros, cilindros, conos y elipsoides. En el uso más informal, curva geodésica y curva extremal se consideran la misma cosa. La sutileza radica en el hecho de que a veces se hace una distinción entre la imagen de la curva y la parametrización que la genera. Curvas que tienen la misma imagen pueden diferir en su parametrización, en cuyo caso se consideran curvas distintas. Las curvas geodésicas suelen definirse con una parametrización específica.

Pasemos al problema de las curvas extremales en el caso más sencillo. Tomemos dos puntos en el plano. Sin pérdida de generalidad pueden ser el origen \mathbf{q} y un punto \mathbf{p} con coordenadas cartesianas (a, b) , con $a \neq 0$. Consideremos una curva

$$\gamma : [0, \lambda^*] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (58)$$

tal que $\gamma(0) = (0, 0)$ y $\gamma(\lambda^*) = (a, b)$. Esta curva une al origen con el punto \mathbf{p} . Su longitud está dada por la siguiente integral

$$I[\gamma] = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{\lambda^*} d\lambda \sqrt{x'(\lambda)^2 + y'(\lambda)^2}. \quad (59)$$



Extremar $I[\gamma]$ equivale a plantear las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, y, x', y', \lambda) = \sqrt{x'^2 + y'^2}. \quad (60)$$

Aquí es donde usamos cosas conocidas de mecánica. En particular, el lagrangiano no depende ni de x ni de y , por lo tanto el par de ecuaciones de Euler-Lagrange admite dos integrales primeras:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = A, \quad (61)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = B. \quad (62)$$

Calculando explícitamente las derivadas, vemos que

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = A, \quad \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = B. \quad (63)$$

Alguno puede notar que estas ecuaciones no son independientes. Asumiendo que $B \neq 0$,

dividiendo entre sí las dos ecuaciones, resulta

$$y'(\lambda) = Cx'(\lambda). \quad (64)$$

Aquí A , B y C son constantes. Pero entonces

$$\frac{dy}{dx} = C, \quad (65)$$

que es la definición de una recta:

$$y(x) = Cx + D. \quad (66)$$

Imponiendo las condiciones de contorno (excluimos el caso $a = 0$), resulta

$$y(x) = \frac{b}{a}x. \quad (67)$$

Observen que el parámetro λ desapareció de la solución, y por una buena razón. Hay infinitas parametrizaciones del segmento de recta que une al origen con el punto \mathbf{p} . La ec. (64) sólo implica

$$y(\lambda) = \frac{b}{a}x(\lambda). \quad (68)$$

La función $x(\lambda)$ puede ser cualquier función de λ tal que $x(\lambda^*) = a$. Notar que esto incluye funciones no monótonas. La curva γ podría pasar varias veces sobre un mismo punto. No dejan de ser curvas extremales, pero no serán las de longitud mínima.

Una alternativa hubiera sido partir de una parametrización en la que x fuera el parámetro. Eso no incluye todas las curvas posibles. De todos modos, en tal caso

$$I[\gamma] = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^a dx \sqrt{1 + y'(x)^2}. \quad (69)$$

Estamos asumiendo que $a > 0$, si no, debería aparecer un signo menos, pues la longitud de la curva es siempre mayor o igual que cero. En términos mecánicos, hay ahora una única coordenada generalizada, y , y una sola ecuación de Euler-Lagrange. Antes también había una sola ecuación independiente, por más que fueran dos coordenadas.

El lagrangiano es

$$\mathcal{L}(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (70)$$

Debido a que \mathcal{L} no depende explícitamente de y , obtenemos una integral primera de manera inmediata,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C. \quad (71)$$

Si una función no constante de y' es constante, entonces y' debe ser constante. Esto es,

$$y'(x) = c. \quad (72)$$

Y de aquí volvemos al resultado

$$y(x) = \frac{b}{a}x. \quad (73)$$

Para decirlo nuevamente: las curvas extremales en el plano tienen por imágenes segmentos de recta.

En el plano también podríamos haber elegido coordenadas polares, en cuyo caso la longitud de la curva γ es

$$I[\gamma] = \int_0^{\lambda^*} d\lambda \sqrt{\rho'(\lambda)^2 + \rho(\lambda)^2 \varphi'(\lambda)^2}. \quad (74)$$

Si parametrizamos la curva usando el ángulo φ (lo que excluye rectas por el origen), resulta

$$I[\gamma] = \int_0^{\varphi^*} d\varphi \sqrt{\rho'(\varphi)^2 + \rho(\varphi)^2}. \quad (75)$$

La situación es más complicada que antes, porque el lagrangiano

$$\mathcal{L}(\rho, \rho', \varphi) = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} \quad (76)$$

es función explícita de ρ . Ya no podemos usar el carácter cíclico de la coordenada para obtener una integral primera. Sin embargo, este lagrangiano pertenece a una clase para la cual es posible obtener una integral primera de manera inmediata. Lo esencial para que exista esa integral es que \mathcal{L} no sea una función explícita de la variable independiente. Conviene hacer aquí un pequeño paréntesis para definir la función h , estrechamente relacionada con el hamiltoniano del sistema.

La función h

Asuman que el lagrangiano tiene la forma usual

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (77)$$

Calculemos su derivada total respecto del tiempo cuando las N coordenadas son funciones cualesquiera $q_i(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \ddot{q}_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \dot{q}_i(t) \right] \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t). \end{aligned} \quad (78)$$

Si las funciones $q_i(t)$ son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces podemos escribir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t). \quad (79)$$

Omitiendo los argumentos de las funciones q_i , la ec. (78) se lee entonces como

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^N \left[\ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (80)$$

Cada término de la sumatoria es la derivada respecto del tiempo de un producto, luego

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (81)$$

Agrupando de un mismo lado de la ecuación todas las derivadas totales, y pervirtiendo un poco los signos, resulta

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (82)$$

Más brevemente,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (83)$$

No se insistirá lo suficiente al remarcar que la ecuación anterior vale únicamente evaluada sobre las funciones $q_i(t)$ que son soluciones de las ecuaciones de movimiento. El caso importante es cuando \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo, lo que implica

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \text{constante}. \quad (84)$$

Esta constante suele llamarse h . La ecuación anterior sólo involucra derivadas primeras, en contraste con las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Siempre podemos introducir una función de las mismas variables que el lagrangiano,

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (85)$$

aún cuando no la evaluemos sobre soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sea

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (86)$$

Esta función está íntimamente ligada al hamiltoniano del sistema. Una primera cosa para comentar es que si \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo, entonces h tampoco.

El resultado fundamental que hemos demostrado es que si las q_i son soluciones de las ecuaciones de movimiento, entonces

$$\frac{dh}{dt}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t). \quad (87)$$

Y, en particular, si \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo entonces

$$h(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = h = \text{constante}. \quad (88)$$

Es un pequeño abuso de notación llamar con la misma letra h a la función y a la constante, pero con un poco de práctica es improbable que esto genere confusión.

Aplicación al lagrangiano (76)

Para el problema de la curva extremal en el plano, cuando se usan coordenadas polares, el lagrangiano que encontramos era el de la ec. (76),

$$\mathcal{L}(\rho, \rho', \varphi) = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}. \quad (89)$$

Aquí no hay coordenadas cíclicas, pero \mathcal{L} no depende explícitamente de la variable independiente, que en este caso es φ . Entonces una integral primera es la función h . Las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange serán tales que la función

$$h(\rho, \rho') = \rho' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho'}(\rho, \rho') - \mathcal{L}(\rho, \rho') \quad (90)$$

será constante al evaluarla sobre esas soluciones. El cálculo explícito de la expresión anterior implica que

$$\frac{\rho'^2}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} - \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} = -\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} = h. \quad (91)$$

Elevando al cuadrado y agrupando términos queda

$$\frac{\rho'^2}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{h^2}, \quad (92)$$

La ventaja de haber escrito las cosas así es que se simplifica la integración. Observen que si definimos

$$u = \frac{1}{\rho}, \quad (93)$$

entonces

$$u' = -\frac{\rho'}{\rho^2} \Rightarrow u'^2 = \frac{\rho'^2}{\rho^4}. \quad (94)$$

Luego, la ec. (92) escrita en términos de u se lee como

$$u'^2 + u^2 = \frac{1}{h^2}, \quad (95)$$

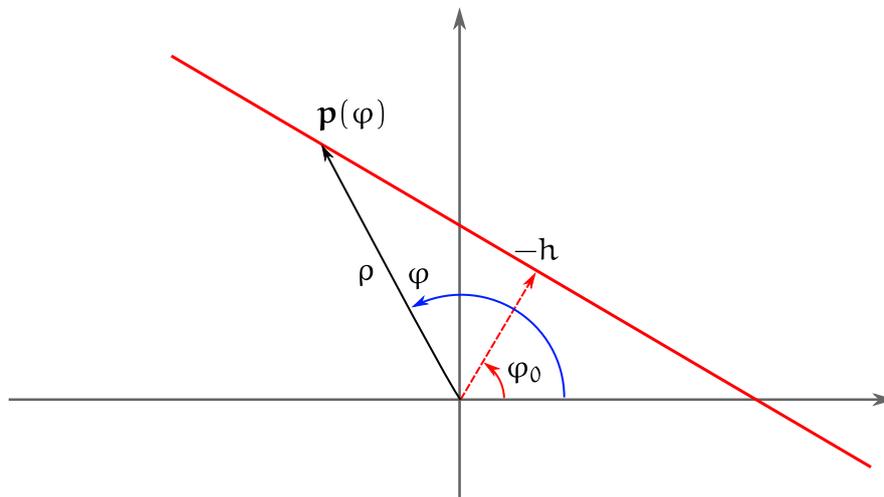
que es idéntica a la ecuación de conservación de un oscilador armónico. Eso implica

$$u(\varphi) = -\frac{1}{h} \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (96)$$

donde φ_0 es otra constante de integración. (El signo menos es por simplicidad, teniendo en cuenta que, según la ec. (91), es $h < 0$). Finalmente, volviendo a la variable ρ , obtenemos la ecuación de la curva en coordenadas polares

$$\rho(\varphi) = \frac{-h}{\cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (97)$$

Esta es la ecuación de una recta en el plano. Para verlo alcanza con una figura.



El ángulo φ_0 es aquel para el cual la distancia de la recta al origen es mínima, siendo $-h$ esa distancia.

Así que, tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas polares, encontramos que las curvas extremales en el plano son rectas o, más precisamente, segmentos de rectas. Obviamente, este resultado tiene que ser independiente de qué coordenadas usemos, y no sólo de la parametrización. Yo no sé cuántos de ustedes podrían haber escrito de un tirón la ecuación de la recta en coordenadas polares. Si lo piensan un poco, las ecuaciones de Euler-Lagrange permiten encontrar la ecuación paramétrica de la recta en sistemas de coordenadas arbitrarios, sin la necesidad de figuras, tal como quería Lagrange.

**On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage.
Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques,**

Curvas extremales en otras superficies

Damos tres ejemplos a modo de ejercicio.

- a) **El cilindro circular recto de radio R .** En coordenadas cilíndricas el elemento de longitud es

$$d\ell^2 = R^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (98)$$

Para una parametrización general, el lagrangiano dependerá de dos coordenadas generalizadas,

$$\mathcal{L}(\varphi, z, \varphi', z') = \sqrt{R^2 \varphi'^2 + z'^2}. \quad (99)$$

Si se elige como parámetro el ángulo φ queda, en cambio,

$$\mathcal{L}(z, z') = \sqrt{R^2 + z'^2}. \quad (100)$$

Esta elección del parámetro excluye situaciones en las que la curva es una recta vertical, pues entonces z' tiende a infinito. La funcional que hay que extremar es

$$I[z(\varphi)] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{R^2 + z'(\varphi)^2}. \quad (101)$$

Notarán en la ec. (98) que, con la identificación $R\varphi \rightarrow x$ y $z \rightarrow y$, resulta el mismo elemento de longitud que en el plano,

$$d\ell^2 = R^2 d\varphi^2 + dz^2 \rightarrow dx^2 + dy^2. \quad (102)$$

Podemos usar eso para afirmar que las curvas extremales serán de la forma

$$z(\varphi) = a\varphi + b. \quad (103)$$

Este hecho tiene su origen en la posibilidad de desplegar el cilindro sobre el plano. La métrica del plano y la del cilindro son idénticas. Las curvas extremales en el cilindro son hélices. Cuando el cilindro se despliega sobre el plano, las hélices forman segmentos de rectas. Sin embargo, aunque las métricas sean equivalentes hay diferencias topológicas esenciales entre el plano y el cilindro.

Lo interesante del cilindro está en su topología global. El problema es encontrar la curva de longitud extremal entre dos puntos. Sin pérdida de generalidad uno de esos puntos puede ser $\varphi = 0, z = 0$. De modo que $z(\varphi) = a\varphi$ asegura la condición acerca del primer borde. Ahora bien, la condición sobre el otro extremo tiene que tener en cuenta que valores de φ que difieren en múltiplos enteros de 2π representan el mismo punto. Así, pedir que $z(\varphi^*) = z^*$ es equivalente a pedir que $z(\varphi^* + 2\pi) = z^*$ (para fijar ideas podemos suponer que $0 < \varphi^* < 2\pi$). Ambas curvas comparten el mismo borde.

Por lo tanto, más generalmente, la condición sobre el segundo borde debe ser

$$z(\varphi^* + 2k\pi) = z^*, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (104)$$

De aquí resulta

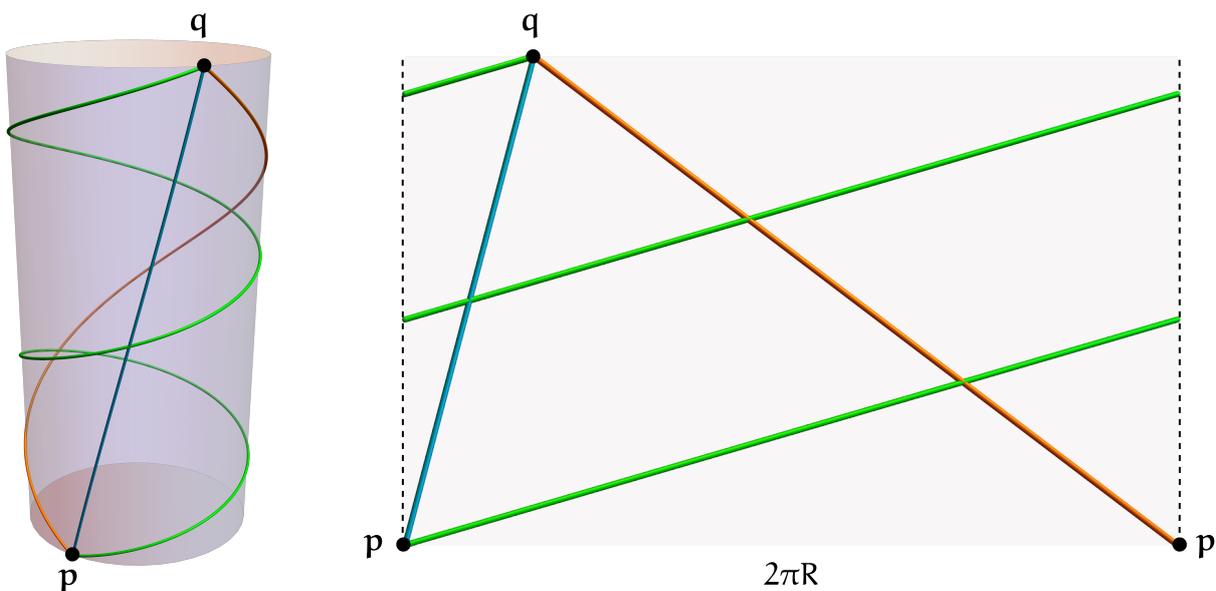
$$a(\varphi^* + 2k\pi) = z^* \Rightarrow a_k = \frac{z^*}{\varphi^* + 2k\pi}. \quad (105)$$

Entonces encontramos una familia de curvas extremales, que unen los mismos puntos:

$$z_k(\varphi) = \frac{z^*}{\varphi^* + 2k\pi} \varphi, \quad \varphi \in [0, \varphi^* + 2k\pi]. \quad (106)$$

La constante de proporcionalidad entre z y φ puede tener cualquier signo. Eso corresponde a una hélice que gira hacia la derecha o hacia la izquierda. En una torre siempre pueden orientar la escalera caracol de dos maneras posibles, y además pueden variar la inclinación, aumentando o disminuyendo el número de escalones, sin alterar el hecho de que conectan los mismos lugares. Eso es lo que está diciendo la ecuación anterior. Queda como ejercicio para ustedes determinar cuál de todas las posibles hélices da la longitud mínima, dependiendo de los valores de φ^* y z^* .

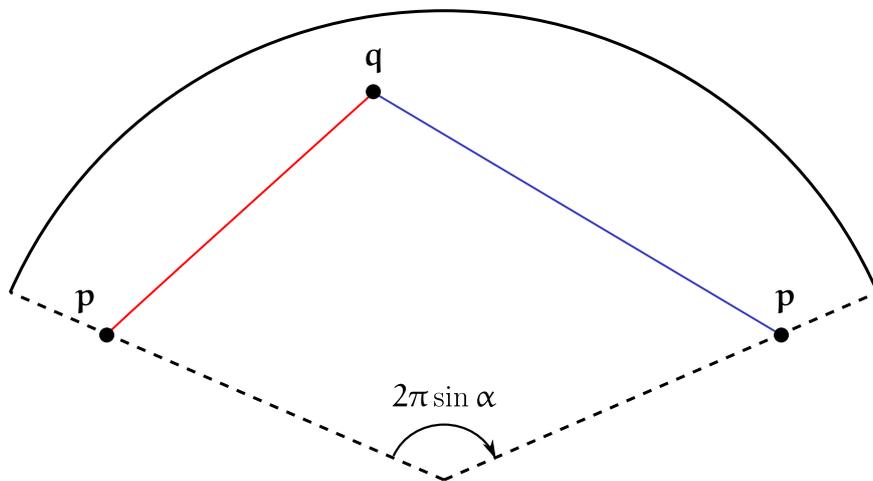
Todas estas sutilezas relacionadas con la topología del cilindro pueden entenderse muy fácilmente si al cilindro se lo representa por una banda plana infinita de ancho $2\pi R$, identificando los dos bordes laterales. Hecha esta identificación, es fácil convencerse de que las hélices que unen dos puntos dados son líneas rectas que, cuando llegan a un borde, continúan por el opuesto. La figura muestra esta construcción. El cilindro; el cilindro desplegado sobre el plano con los bordes identificados, y tres curvas que unen p con q , en uno y en otro sentido de giro, representadas como hélices en una figura y como segmentos rectos en la otra.



b) **El cono circular recto.** Tomemos la rama superior del cono definido por el ángulo polar $\theta = \alpha$. El elemento de longitud es

$$d\ell = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \alpha d\varphi^2}. \quad (107)$$

De nuevo es fácil ver que el problema puede reducirse al del plano. Esto ocurre porque el cono puede desplegarse sobre el plano sin deformarse. Si enrollan el recorte de papel de la siguiente figura, pegando los bordes dibujados en líneas de trazos, obtendrán un cono. Las curvas extremales pueden dibujarse sin dificultad en el cono desplegado, y existen los mismos problemas de multiplicidad que en el caso del cilindro. Queda como ejercicio para ustedes escribir el lagrangiano y encontrar las ecuaciones paramétricas de las curvas extremales, o bien la función $r(\varphi)$.



c) **La esfera de radio $r = 1$.** En coordenadas esféricas hay que extremar la funcional

$$I[\gamma] = \int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2} = \int_0^{\lambda^*} d\lambda \sqrt{r^2 \theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2}. \quad (108)$$

Demuestren ustedes, usando una parametrización general o, más fácilmente, cuando se usa como parámetro el ángulo φ , que la ecuación diferencial que satisface $\theta(\varphi)$ es

$$\frac{1}{\sin^4 \theta} \theta'^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} = a^2, \quad (109)$$

donde a es una constante de integración. No es evidente, pero estas curvas extremales recorren círculos máximos en la esfera. Es otra cosa que pueden verificar.

Demasiadas coincidencias

Hemos visto que las curvas extremales en el plano son rectas. Estas curvas se deducen de un principio extremal para la acción

$$I[\gamma] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \sqrt{x'(\lambda)^2 + y'(\lambda)^2}. \quad (110)$$

También son rectas las trayectorias que siguen las partículas libres en el plano. Esas trayectorias se deducen de un principio extremal para la acción

$$\tilde{I}[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{1}{2} [\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2]. \quad (111)$$

En un caso el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(x, y, x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad (112)$$

y en el otro,

$$\tilde{\mathcal{L}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (113)$$

Así y todo, una partícula libre en el plano se mueve sobre curvas que extreman la distancia.

También hemos visto que las curvas extremales en el cilindro son hélices. Estas curvas se deducen de un principio extremal para la acción

$$I[\gamma] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \sqrt{R^2 \varphi'(\lambda)^2 + z'(\lambda)^2}. \quad (114)$$

¿Cuáles son las trayectorias de las partículas libres sobre un cilindro? Bien, habrá que resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z}) = \frac{1}{2} (R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad (115)$$

lo que es equivalente a extremar la acción

$$\tilde{I}[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{1}{2} [R^2 \dot{\varphi}(t)^2 + \dot{z}(t)^2]. \quad (116)$$

Ambas coordenadas son cíclicas, de modo que

$$\dot{\varphi}(t) = \omega, \quad \dot{z}(t) = v. \quad (117)$$

De aquí se deduce que

$$z(\varphi) = \frac{v}{\omega} (\varphi - \varphi_0) + z_0. \quad (118)$$

Las trayectorias son hélices. Así que, tanto para el lagrangiano que extrema la longitud,

$$\mathcal{L}(\varphi, z, \varphi', z') = \sqrt{R^2 \varphi'^2 + z'^2}, \quad (119)$$

como para el lagrangiano del cual se deducen las trayectorias de las partículas libres,

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z}) = \frac{1}{2} (R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad (120)$$

las soluciones son hélices. También en el cilindro las partículas libres se mueven sobre curvas que extreman la distancia.

Antes de saltar a una conclusión apresurada, veamos un último ejemplo: el movimiento de una partícula libre de masa 1 sobre una esfera de radio 1. El lagrangiano es

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right). \quad (121)$$

En lugar de plantear las ecuaciones de Euler-Lagrange, trabajemos con dos integrales primeras, la energía y el momento angular en la dirección z . El carácter cíclico de la coordenada φ implica

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\varphi}} = \sin^2 \theta \dot{\varphi} = l_z. \quad (122)$$

Por otro lado, la conservación de la energía se escribe como

$$\frac{1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) = E. \quad (123)$$

Usando la conservación de l_z , esta última ecuación se lee también como

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{l_z^2}{2 \sin^2 \theta} = E. \quad (124)$$

Cambiamos a la variable independiente φ , a través de la relación

$$\dot{\theta} = \dot{\varphi} \theta' = \frac{l_z}{\sin^2 \theta} \theta', \quad (125)$$

donde el primado significa derivada respecto de φ . Reemplazando en la ecuación (124),

$$\frac{1}{\sin^4 \theta} \theta'^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{2E}{l_z^2}. \quad (126)$$

En el ejemplo que quedó como ejercicio en la sección anterior, dijimos que las curvas extremales sobre la esfera satisfacen la ec. (109),

$$\frac{1}{\sin^4 \theta} \theta'^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} = \alpha^2. \quad (127)$$

De forma tal que ahora vemos que las trayectorias de una partícula libre sobre la esfera satisfacen la misma ecuación: la partícula libre sobre la esfera se mueve sobre una curva de longitud extremal. Pero lo primero se deduce del lagrangiano

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z}) = \frac{1}{2} \left(R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right), \quad (128)$$

y lo segundo del lagrangiano

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi', z, z') = \sqrt{R^2 \varphi'^2 + z'^2}. \quad (129)$$

Plano, cilindro, esfera: ¿será una coincidencia que el movimiento de una partícula libre sobre estas superficies se realice sobre curvas de longitud extremal? No se trata de una coincidencia, sino de un resultado general, como demostraremos en la próxima sección.

Curvas extremales y partículas libres: geodésicas

El elemento de longitud sobre una superficie donde se han definido coordenadas x_1 y x_2 está dado por la siguiente expresión:

$$d\ell = \sqrt{g_{11}(\mathbf{x})dx_1^2 + 2g_{12}(\mathbf{x})dx_1 dx_2 + g_{22}(\mathbf{x})dx_2^2}. \quad (130)$$

Los coeficientes g_{ij} son las componentes de la métrica. En el caso de la esfera, por ejemplo,

$$d\ell = \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}. \quad (131)$$

De modo que $g_{\theta\theta} = 1$, $g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta$, y $g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0$. La propiedad $g_{ij} = g_{ji}$ vale siempre.

Escrito más brevemente, el elemento de longitud sobre una superficie es, en general,

$$d\ell = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{x})dx_i dx_j}. \quad (132)$$

Para una curva γ parametrizada por el parámetro λ , su longitud es

$$I[\gamma] = \int d\ell = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{d\lambda} \frac{dx_j}{d\lambda}}. \quad (133)$$

Extremar esta longitud es equivalente a resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{d\lambda} \frac{dx_j}{d\lambda}}. \quad (134)$$

Hasta aquí el problema de las curvas extremales y de su correspondiente lagrangiano.

Pasando ahora el problema de la partícula libre que se mueve sobre una superficie. El lagrangiano es

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\ell}{dt} \right)^2 (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}. \quad (135)$$

De manera que el principio variacional que rige el movimiento de la partícula corresponde a extremar la acción

$$\tilde{I}[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}. \quad (136)$$

Aunque los lagrangianos (134) y (135) sean distintos, el mismo objeto g_{ij} es el que los define. No es de extrañar entonces que el problema de las curvas extremales guarde cierta relación con el movimiento de las partículas libres sobre las superficies.

Lo que parecen sugerir los ejemplos que hemos analizado en la sección anterior es que las imágenes de las curvas que extreman la funcional $I[\gamma]$ son las mismas que las imágenes de las curvas que extreman la funcional $\tilde{I}[\gamma]$. Si esta conjetura fuera cierta, el problema de encontrar las curvas de longitud extremal podría simplificarse enormemente, porque el lagrangiano de la partícula libre no contiene raíces cuadradas. Son más sencillas las ecuaciones de Euler-Lagrange del lagrangiano (135) que las del lagrangiano (134). Están invitados a deducir ambos conjuntos de ecuaciones y a comparar sus expresiones.

El hecho de que partículas libres restringidas a moverse sobre superficies sigan curvas de longitud extremal puede demostrarse de la siguiente manera. El problema variacional para las curvas extremales consiste en buscar los extremos de la acción

$$I[\gamma] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \sqrt{f(\lambda)}, \quad (137)$$

donde

$$f = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{d\lambda} \frac{dx_j}{d\lambda}. \quad (138)$$

Haciendo explícitamente la variación, resulta

$$\delta I[\gamma] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \frac{1}{2\sqrt{f(\lambda)}} \delta f(\lambda). \quad (139)$$

El parámetro λ es arbitrario. Si lo elegimos de modo tal que $f = 1$, entonces el principio variacional toma la forma

$$\delta I[\gamma] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \frac{1}{2} \delta f(\lambda) = 0, \quad (140)$$

que corresponde a la variación de la acción

$$\tilde{I}[\gamma] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \frac{1}{2} f(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{d\lambda} \frac{dx_j}{d\lambda}. \quad (141)$$

Pero lo que está dentro de la última integral no es otra cosa que el lagrangiano de una partícula libre moviéndose sobre la superficie en cuestión. Es decir, que el problema de la partícula moviéndose en la superficie corresponde a una parametrización especial del problema de la curva extremal. La interpretación del parámetro λ está dada a través de la condición $f = 1$, y se lee como

$$\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{x}) \frac{dx_i}{d\lambda} \frac{dx_j}{d\lambda} = 1. \quad (142)$$

Multiplicando por $d\lambda^2$, queda

$$\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{x}) dx_i dx_j = d\lambda^2. \quad (143)$$

Así, el parámetro λ es, salvo quizá por el signo, la propia longitud de arco. La condición $f = 1$ significa que la partícula libre del problema mecánico equivalente se mueve con velocidad de módulo constante e igual a 1. Y la partícula del problema mecánico se mueve con velocidad constante debido simplemente a la conservación de la energía.

■ **Ejercicio propuesto.** Demuestren directamente que las ecuaciones de Euler-Lagrange para una partícula que se mueve sobre una superficie con métrica $g_{ij}(\mathbf{x})$ pueden escribirse en la siguiente forma (con notación un poco caprichosa)

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (144)$$

y encuentren los coeficientes Γ_{jk}^i en términos de la métrica y de sus derivadas. La ecuación anterior se conoce en geometría diferencial con el nombre de ecuación geodésica. Es de especial importancia en relatividad general. Los coeficientes Γ_{jk}^i son las componentes de la conexión métrica.