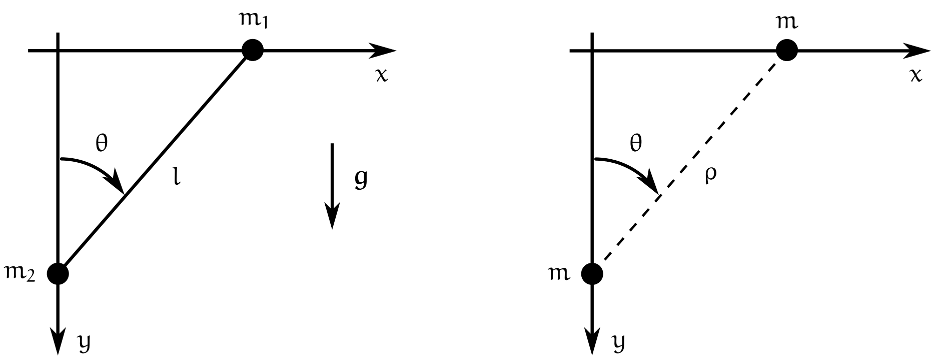
Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021
Ejemplo del método de los multiplicadores de Lagrange.*

■ **Guía 1, problema 5**. Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo inextensible de longitud l (figura de la izquierda); m_1 se mueve sólo sobre el eje x y m_2 sólo sobre el y.

c) Si $m_1 = m_2 = m$, halle la tensión T en el hilo como función de θ.



■ **Solución mediante el método de los multiplicadores de Lagrange**. Si no necesitáramos averiguar la tensión, en este problema usaríamos una sola coordenada generalizada, por ejemplo el ángulo θ. Eso supone haber utilizado implícitamente todas las ecuaciones de vínculo para lograr el número mínimo de parámetros que describan la configuración del sistema. Para averiguar la tensión, en lugar de hacer esa eliminación, mantendremos dos coordenadas generalizadas, θ y ρ, pero impondremos una condición sobre sus desplazamientos. En este caso esa condición es muy sencilla:

$$\dot{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\rho = 0. \tag{1}$$

Para los desplazamientos virtuales esta ecuación implica

$$\delta\rho = 0. \tag{2}$$

Al aumentar el número de coordenadas generalizadas, las ecuaciones de movimiento incluirán un multiplicador de Lagrange.

La ec. (2) es del siguiente tipo genérico

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ji}\delta q_i, \qquad j = 1, \ldots, M, \tag{3}$$

donde M es el número de ecuaciones y los coeficientes a_{ji} son funciones conocidas de las coordenadas y el tiempo (pero no de las $\dot{q}_i$). En el caso del problema de la guía, hay una sola ecuación, ec. (2); todos los coeficientes a_{ji} son cero salvo $a_{1\rho} = 1$.

*zanellaj@df.uba.ar

El método de los multiplicadores de Lagrange tiene dos ingredientes: i) el principio de D'Alembert, y ii) las ecuaciones de vínculo (que deben ser lineales en las velocidades). Mediante la introducción del lagrangiano, el principio de D'Alembert puede reducirse sistemáticamente a la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\right)\delta q_i=0, \tag{4}$$

donde los desplazamientos virtuales δq_i deben satisfacer las M ecuaciones de vínculo

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ji}\delta q_i=0, \qquad j=1,\ldots,M. \tag{5}$$

Hay que notar que las ecuaciones de vínculo para los desplazamientos virtuales pueden provenir, más generalmente, de ecuaciones del tipo

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ji}dq_i+b_j dt=0, \qquad j=1,\ldots,M, \tag{6}$$

que son las ecuaciones de vínculo para desplazamientos admisibles en general. Si $dt=0$, se obtienen las ecuaciones para los desplazamientos virtuales. La ecuación anterior también puede escribirse como una relación lineal entre las velocidades

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ji}\dot{q}_i+b_j=0, \qquad j=1,\ldots,M. \tag{7}$$

Dicho una vez más: la ecuación (4) debe valer para todos los desplazamientos virtuales que satisfacen las M ecuaciones (5). Este sencillo enunciado implica el resultado principal, a saber, la existencia M funciones del tiempo λ_j tales que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{M}\lambda_j a_{ji}. \tag{8}$$

Las funciones λ_j son los multiplicadores de Lagrange. La demostración usual de este teorema es de las más odiosas que existen. Se recomienda leer el libro de Spivak (Problema 5.1) para una demostración geométrica; ver también las notas de clase citadas al final.

El sistema completo de ecuaciones que hay que resolver está formado por las M ecuaciones de vínculo (7) y por las N ecuaciones de movimiento (8). Las incógnitas son las N funciones q_i y las M funciones λ_j. Aunque llevado al papel el método de los multiplicadores de Lagrange puede ser tedioso, tiene un punto a favor: se puede programar en la computadora muy rápidamente. Cuando uno trabaja con más coordenadas de las necesarias, el lagrangiano tiende a simplificarse. Así, puede ser muy práctico trabajar en la computadora con un lagrangiano simple usando multiplicadores de Lagrange en lugar de imponer los vínculos explícitamente. Si los vínculos son genuinamente no holónomos, no quedará otra alternativa.

Los multiplicadores de Lagrange están relacionados con las fuerzas de vínculo. Puesto que los vínculos pueden reemplazarse por fuerzas predeterminadas, la ec. (8) es equivalente a decir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \tag{9}$$

donde Q_i tiene que dar cuenta de la fuerza generalizada asociada a los agentes que realizan los vínculos,

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^{(v)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \tag{10}$$

Aquí la suma en k es sobre las partículas. Resuelto el problema, tendremos, en definitiva, una relación entre las fuerzas de vínculo y los multiplicadores de Lagrange,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^{(v)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j a_{ji}. \tag{11}$$

Extraer de aquí las fuerzas de vínculo $\mathbf{F}_k^{(v)}$ requiere la especificación precisa de los medios por los cuales estos vínculos se realizan. Un mismo conjunto de vínculos puede ponerse en práctica de distintas maneras. Es razonable, entonces, que las ecuaciones anteriores por sí solas sean insuficientes para despejar las fuerzas. De ahí la necesidad de aportar hipótesis adicionales.

En el problema que estamos considerando, es fácil demostrar que al trabajar con las coordenadas generalizadas θ y ρ el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\theta, \rho, \dot{\theta}, \dot{\rho}) = \tfrac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2\right) + m g \rho \cos\theta. \tag{12}$$

El punto de partida para llegar a este lagrangiano consiste en escribir las posiciones de las dos partículas en función de las coordenadas generalizadas θ y ρ,

$$\mathbf{r}_1(\theta, \rho) = \rho \sin\theta\, \hat{x}, \qquad \mathbf{r}_2(\theta, \rho) = \rho \cos\theta\, \hat{y}. \tag{13}$$

La ecuación de vínculo es del tipo de las que estamos considerando

$$\dot{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\rho = 0. \tag{14}$$

Por lo tanto, los desplazamientos virtuales deben ser tales que

$$\delta\rho = 0. \tag{15}$$

Los desplazamientos virtuales satisfacen las mismas ecuaciones de vínculo que los desplazamientos admisibles en general. Puesto que hay una sola ecuación de vínculo, habrá un único multiplicador λ. Si queremos expresar la ecuación de vínculo para que tenga el aspecto de la ec. (5), escribiríamos

$$a_{1\theta}\delta\theta + a_{1\rho}\delta\rho = 0, \tag{16}$$

donde $a_{1\theta} = 0$ y $a_{1\rho} = 1$.

Hay una ecuación de movimiento asociada a cada coordenada:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = a_{1\theta}\lambda, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = a_{1\rho}\lambda. \tag{18}$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = \lambda. \tag{20}$$

Escritas por extenso, estas dos ecuaciones son

$$m\left(\rho^2\ddot\theta + 2\rho\dot\rho\dot\theta + g\rho\sin\theta\right) = 0, \tag{21}$$

$$m\left(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2 - g\cos\theta\right) = \lambda. \tag{22}$$

A estas ecuaciones hay que agregar la ecuación de vínculo $\dot\rho = 0$, de manera que el sistema se simplifica y queda lo siguiente:

$$\ddot\theta + \frac{g}{\rho}\sin\theta = 0, \tag{23}$$

$$-m\left(\rho\dot\theta^2 + g\cos\theta\right) = \lambda. \tag{24}$$

De hecho, la ecuación de vínculo $\dot\rho = 0$ es integrable. Debe ser $\rho = l$. Así que, finalmente,

$$\ddot\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \tag{25}$$

$$-m\left(l\dot\theta^2 + g\cos\theta\right) = \lambda. \tag{26}$$

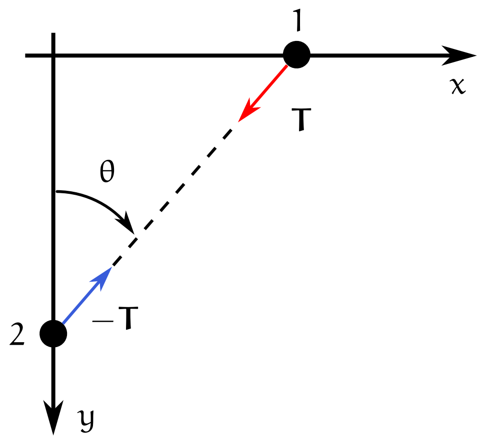
La primera ecuación es la ecuación de movimiento propiamente dicha. La segunda ecuación nos dice cuánto vale λ.

Para relacionar este resultado con la tensión en el hilo, debemos calcular las fuerzas generalizadas asociadas a los vínculos; habrá una por cada coordenada. En este punto es necesario introducir hipótesis adicionales acerca del hilo y de las guías sobre las que se mueven las partículas. Es razonable asumir que:

a) la tensión está en la dirección del hilo,

b) el hilo ejerce fuerzas iguales y opuestas sobre cada partícula,

c) las guías no ejercen fuerzas tangenciales.



Si no se hace explícito el mecanismo físico por el cual se mantiene la condición $\rho = l$, entonces no es posible interpretar λ de manera unívoca. Aquí estamos suponiendo que hay un hilo ideal y que los ejes no ejercen fuerzas tangenciales. Sobre la partícula 1, el hilo ejerce una fuerza $\mathbf{T}$, y sobre la partícula 2 una fuerza $-\mathbf{T}$. Las fuerzas de los ejes son normales a los desplazamientos, de manera que no contribuyen a las fuerzas generalizadas. Únicamente la tensión da una contribución no nula:

$$Q_\theta = \mathbf{T}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial\theta} - \mathbf{T}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial\theta}, \tag{27}$$

$$Q_\rho = \mathbf{T}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial\rho} - \mathbf{T}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial\rho}. \tag{28}$$

Definiendo

$$\mathbf{T} = -T\sin\theta\,\hat{x} + T\cos\theta\,\hat{y}, \tag{29}$$

ustedes pueden demostrar que

$$Q_\theta = 0, \tag{30}$$

$$Q_\rho = -T. \tag{31}$$

Según dijimos antes, el segundo miembro en las ecuaciones de movimiento (8),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j a_{ji}, \tag{32}$$

se identifica con la fuerza generalizada asociada a los agentes que hacen efectivas las ecuaciones de vínculo. Es decir,

$$Q_i = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j a_{ji}. \tag{33}$$

En nuestro caso, leyendo las ecs. (21) y (22),

$$m\left(\rho^2\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + g\rho\sin\theta\right) = 0, \tag{34}$$

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g\cos\theta\right) = \lambda, \tag{35}$$

y teniendo en cuenta los resultados (30) y (31), vemos que la relación $Q_\theta = 0$ se cumple automáticamente. Por otro lado, obtenemos que

$$\lambda = Q_\rho = -T. \tag{36}$$

Ya conocemos λ como función de θ y $\dot{\theta}$, ec. (26). Luego,

$$T = m\left(l\dot{\theta}^2 + g\cos\theta\right). \tag{37}$$

El enunciado del problema va un poco más allá: pide averiguar la tensión en función del ángulo. Para eso necesitamos eliminar $\dot{\theta}$. La forma de hacerlo es a través de la conservación de la energía,

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = E. \tag{38}$$

Se asume que E es dato, esto es, conocemos $\dot{\theta}$ y θ en algún instante de tiempo t_0. Eliminando $\dot{\theta}$ de la ecuación anterior y reemplazando el resultado en la ec. (37) llegamos a la expresión requerida,

$$T = \frac{2E}{l} + 3mg\cos\theta. \tag{39}$$

- Lecturas complementarias del mismo autor:

  a) Idéntico problema pero resuelto en 2011 2c, http://materias.df.uba.ar/mcaa2021c1/files/2021/04/2da_guia_resueltos_.pdf. Para calcular la tensión se usan las ecuaciones de Newton y el método de los multiplicadores de Lagrange, pero también un método intermedio que permite ver claramente porqué el multiplicador es igual a la tensión.

b) La clase práctica de 2019 2c sobre este tema tiene una demostración alternativa del método de los multiplicadores de Lagrange. La cosa se pone especialmente interesante luego de la sección 4.2. Además, incluye un problema con genuinos vínculos no holónomos, el problema de “La partícula paranoica”. http://materias.df.uba.ar/mcaa2021c1/files/2021/04/Mecanica_Clasica_2019_2c_clase_4.pdf.