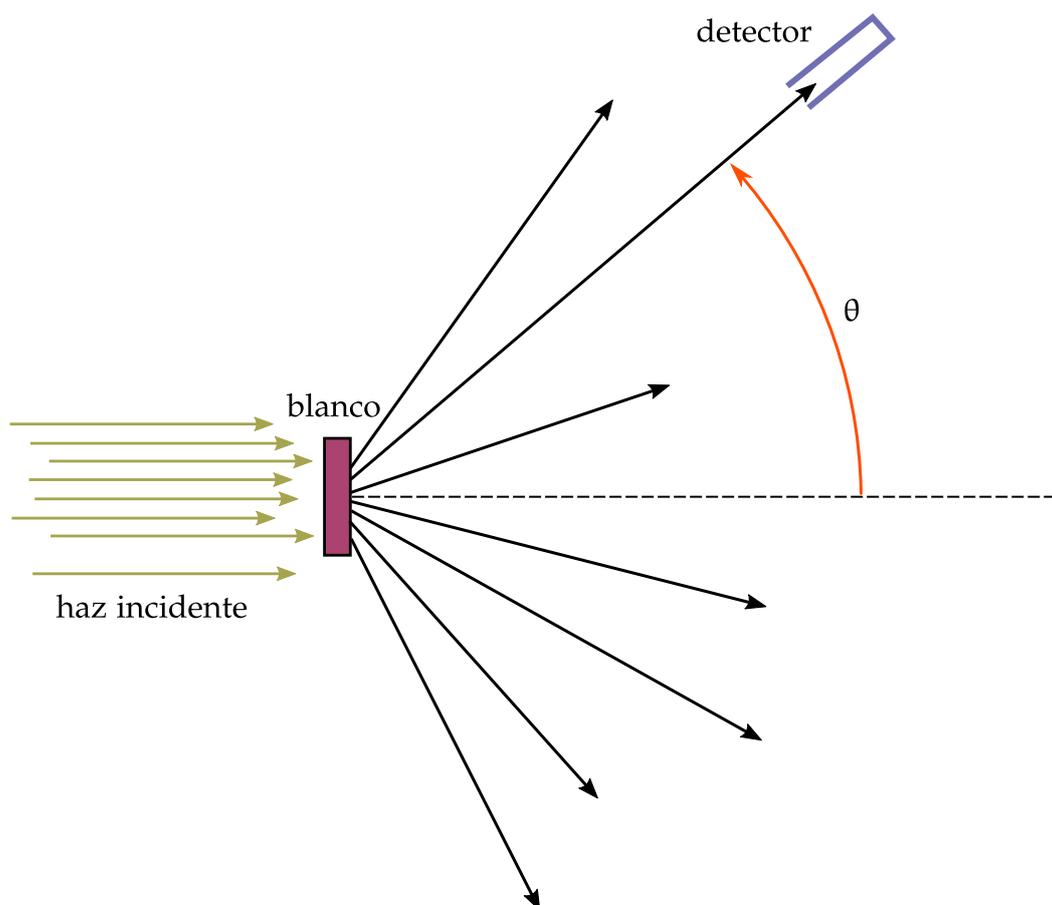


Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021

Clase práctica del jueves 29/4.

Guía 3. Fuerzas centrales. Dispersión.\*

1.	Lo que hay que saber escribir de buenas a primeras . . . . .	2
1.1.	La interpretación de la sección eficaz diferencial . . . . .	5
1.2.	Comentario sobre la notación . . . . .	6
2.	El cálculo llevado a los hechos . . . . .	6
2.1.	Una nota práctica . . . . .	11
2.2.	Un ejemplo: la fórmula de Rutherford . . . . .	12
2.3.	Otra nota práctica . . . . .	15
3.	Problema 7. El pozo de potencial. . . . .	15
3.1.	Primer método . . . . .	17
3.2.	Segundo método . . . . .	20
3.3.	Experimentos con números . . . . .	27
4.	El problema inverso . . . . .	29



---

\*zanellaj@df.uba.ar

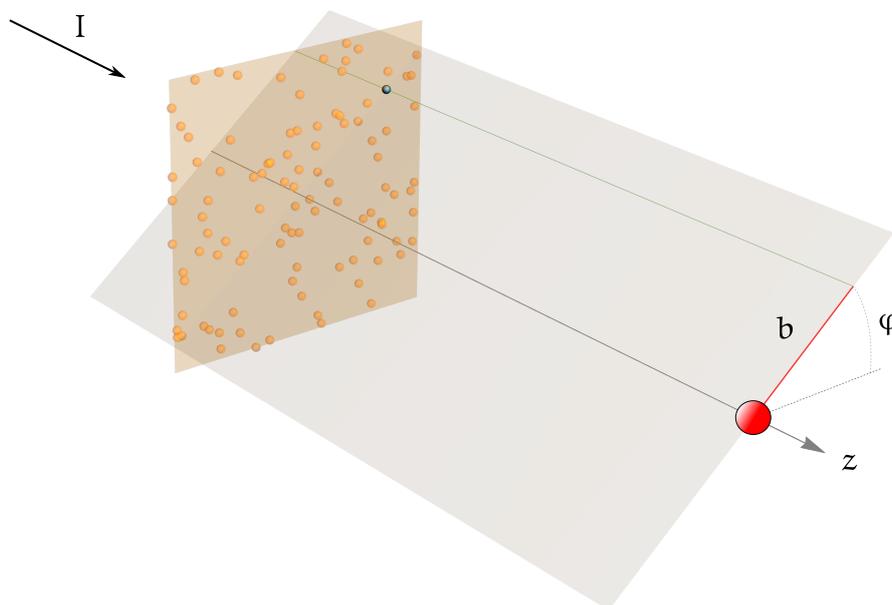
# 1. Lo que hay que saber escribir de buenas a primeras

El propósito de los experimentos de dispersión es determinar la forma en que interactúan las partículas. Se arrojan partículas sobre un blanco y se mide la intensidad  $\mathcal{I}(\theta)$  de las partículas dispersadas en función de la dirección. El objetivo es averiguar la ley de la interacción a partir de esta función. Este es un problema inverso. Un ejemplo más sencillo de problema inverso es averiguar el potencial de interacción si conocemos las órbitas de las partículas, como en el problema inverso de Kepler. En este problema, el dato es que las órbitas son elipses con el centro de fuerza en uno de sus focos. El objetivo es determinar la ley de la fuerza. Eso es lo que resolvió Newton. El problema inverso de dispersión es más complicado. En lugar de tener información sobre la trayectoria completa de las partículas, sólo se posee información sobre las direcciones asintóticas en las que son dispersadas.

Siempre que uno plantea un problema de tipo inverso, lo primero que debe hacer es aprender a resolver el problema directo, y luego analizar si es posible invertirlo. Primero debemos familiarizarnos con el problema directo de la dispersión, es decir, con calcular la intensidad de las partículas dispersadas cuando la interacción es dato. Al final de todo citaremos algunas fuentes que pueden consultar acerca del problema inverso.

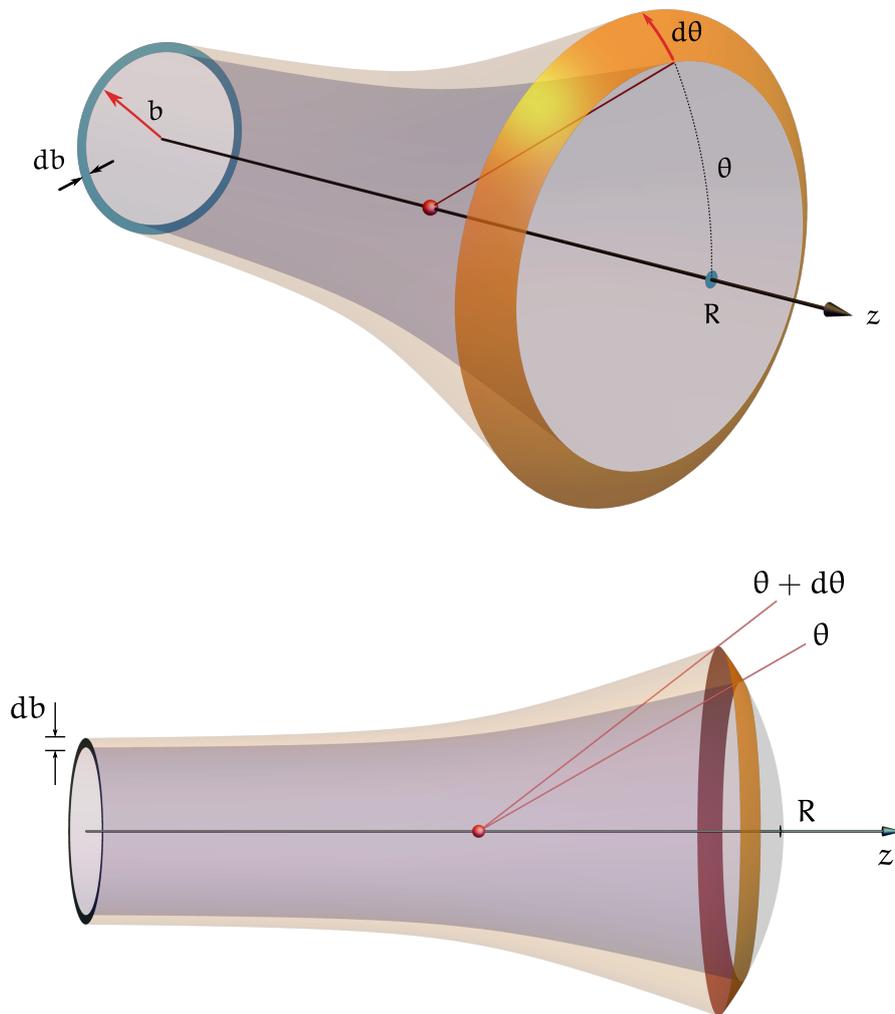
En los problemas de dispersión de partículas por potenciales centrales (o con simetría cilíndrica), la cuestión fundamental es encontrar la relación que existe entre el ángulo de dispersión y el parámetro de impacto. En estas notas consideraremos únicamente problemas de dispersión con el centro de fuerzas fijo.

El problema se plantea así: desde el infinito inciden sobre un centro de fuerza en el origen partículas con una velocidad inicial  $\mathbf{v} = v\hat{z}$ . Todas las partículas tienen la misma velocidad, pero difieren en su parámetro de impacto  $b$ , que es la distancia que las separa del eje  $z$ , y difieren también en el plano en el que se mueven. Este plano puede ser caracterizado por el ángulo azimutal  $\varphi$ , como muestra la figura.



Inicialmente, las partículas están uniformemente distribuidas en un haz de intensidad  $I$ , donde  $I$  es el número de partículas *por unidad de área* y unidad de tiempo que atraviesa cualquier elemento de área perpendicular al haz. Lo que hay que averiguar es la intensidad  $\mathcal{J}(\theta)$  de partículas dispersadas en una dirección  $\theta$  cualquiera. A diferencia de la intensidad incidente, que mide el número de partículas por unidad de área y unidad de tiempo,  $\mathcal{J}(\theta)$  mide el número de partículas *por unidad de ángulo sólido* y por unidad de tiempo. Como veremos, el problema de calcular  $\mathcal{J}(\theta)$  se reduce a encontrar la función  $\theta(b)$ , donde  $\theta(b)$  es el ángulo de desviación de las partículas que inciden con parámetro de impacto  $b$ .

Consideremos un elemento de área con forma de anillo en la sección transversal del haz incidente, muy lejos del centro dispersor. Lo podemos caracterizar por su parámetro de impacto  $b$  y su ancho  $db$ , como muestran las figuras.



Su área vale

$$da = 2\pi b db. \quad (1)$$

El número de partículas que atraviesa este elemento de área por unidad de tiempo es

$$d\dot{N}_{\text{inc}} = I da = 2\pi b I db. \quad (2)$$

Supongamos que para ese parámetro de impacto las partículas sean dispersadas en la dirección  $\theta$ . El ángulo  $\theta$  da la dirección de la velocidad final. Las partículas que atravesaron durante cierto intervalo de tiempo  $dt$  el elemento de área  $da$ , en el futuro lejano atravesarán el elemento de área

$$d\mathcal{A} = R^2 d\Omega = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta, \quad (3)$$

donde  $R$  es arbitrariamente grande. El detector está tan lejos del centro dispersor que las partículas parecen provenir del origen.

Puesto que el módulo de la velocidad final de las partículas es igual al módulo de su velocidad inicial, las partículas salientes también tardarán un intervalo  $dt$  en atravesar el elemento de área  $d\mathcal{A}$ . Así, el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo a través de  $d\mathcal{A}$  será igual al número de partículas incidentes a través de  $da$ ,

$$d\dot{N}_{\text{dis}} = d\dot{N}_{\text{inc}}. \quad (4)$$

Definamos  $\mathcal{J}(\theta)$  como la intensidad de partículas dispersadas por unidad de ángulo sólido en la región asintótica, de modo que sea

$$d\dot{N}_{\text{dis}} = \mathcal{J}(\theta) d\Omega. \quad (5)$$

Las ecs. (4) y (2) implican entonces

$$\mathcal{J}(\theta) d\Omega = 2\pi b I db. \quad (6)$$

Notar, una vez más, que la intensidad dispersada está definida por unidad de ángulo sólido, mientras que la incidente está definida por unidad de área. Luego,

$$\mathcal{J}(\theta) = \frac{2\pi b I db}{d\Omega} = \frac{2\pi b I db}{2\pi \sin \theta d\theta} = I \frac{b db}{\sin \theta d\theta}. \quad (7)$$

Antes de apresurarnos a escribir en el último término de la ec. (7) la derivada de  $b$  respecto de  $\theta$ , que es lo que parecería dictar el cociente entre los dos diferenciales, hay que notar que en la definición de los elementos de área, tanto  $db$  como  $d\theta$  se consideraron cantidades positivas. Sin embargo, la derivada de  $b$  respecto de  $\theta$  puede tener cualquier signo. De esta forma se hace necesario establecer la siguiente relación:

$$\mathcal{J}(\theta) = I \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|. \quad (8)$$

Ahora bien, la intensidad  $I$  es un parámetro que corresponde a cada experimento en particular, no es una cantidad que caracterice a la interacción. Para independizarnos de la intensidad del haz incidente, lo que debemos calcular no es  $\mathcal{J}$  sino  $\mathcal{J}/I$ , que es una magnitud

propia del fenómeno de dispersión. Entonces definimos una función puramente de  $\theta$ ,

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{\mathcal{J}(\theta)}{I} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|, \quad (9)$$

que recibe el nombre de sección eficaz diferencial de dispersión. Por ahora consideren el símbolo  $d\sigma/d\Omega$  como un objeto en sí mismo. En un momento veremos la interpretación que puede dársele al diferencial  $d\sigma(\theta)$ .

En un experimento, uno mide  $\mathcal{J}(\theta)$ , conoce la intensidad del haz incidente y calcula entonces  $\mathcal{J}/I = d\sigma/d\Omega$ . Esta es la función relevante y a partir de ella puede plantearse el problema inverso, que consiste en determinar el potencial de interacción. Tal como señalamos antes, para resolver el problema inverso primero hay que saber resolver el problema directo, es decir, encontrar  $d\sigma/d\Omega$  conocido el potencial de interacción.

### 1.1. La interpretación de la sección eficaz diferencial

Todo lo anterior equivale a realizar las mismas operaciones que uno haría si a una integral sobre  $b$  la quisiera transformar a una integral sobre  $\theta$ . Lo que hemos establecido de forma encubierta es una ecuación de transformación de variables de integración, como es evidente en la ec. (6),

$$2\pi b I db = 2\pi \mathcal{J}(\theta) \sin\theta d\theta. \quad (10)$$

Incluso el hecho de tener que tomar el valor absoluto de la derivada recuerda al jacobiano de un cambio de variables de integración.

Con respecto a por qué se la llama sección eficaz: la palabra *sección* debe leerse como *área* y la palabra *eficaz*, como *equivalente*. Por construcción,

$$I \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \mathcal{J}(\theta). \quad (11)$$

Multiplicando por  $d\Omega$  obtenemos el número de partículas dispersadas que atraviesan el diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$  por unidad de tiempo,

$$I d\sigma(\theta) = \mathcal{J}(\theta) d\Omega. \quad (12)$$

A esto lo podemos leer en la siguiente forma:  $d\sigma(\theta)$  es igual al diferencial de área del haz incidente por el que, en un dado tiempo, pasa el mismo número de partículas que el que pasa a través del elemento  $d\Omega$  en el haz dispersado. En otras palabras: para atrapar el mismo número de partículas que atraviesan el diferencial de ángulo  $d\Omega$  necesitaríamos interceptar las partículas que atraviesan un diferencial de área en el haz incidente igual a  $d\sigma(\theta)$ . Esta es la razón de que se llame sección eficaz diferencial:  $d\sigma$  es la magnitud del elemento diferencial de área del haz incidente que sería equivalente interceptar para atrapar el mismo número de partículas que pasan a través de  $d\Omega$ .

## 1.2. Comentario sobre la notación

En la bibliografía hay dos formas de definir la sección eficaz. La que estamos usando nosotros es la que usa Landau. El otro tipo de notación es el que usa Goldstein.

En el libro de Goldstein se llama  $\sigma$  a lo que nosotros llamamos  $d\sigma/d\Omega$

$$\sigma(\theta) = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right| \quad (\text{notación Goldstein}). \quad (13)$$

Debido a la interpretación que dimos más arriba, tiene más lógica la notación que usa Landau, que llama  $d\sigma$  a lo que Goldstein llama  $\sigma d\Omega$ ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right| \quad (\text{notación Landau}). \quad (14)$$

En la notación de Landau  $d\sigma$  se interpreta directamente como un diferencial de área. En cambio, con la notación de Goldstein lo que tiene el valor de un diferencial de área es  $\sigma d\Omega$ .

Para enredar las cosas aún más, se define también la sección eficaz total que, en la notación de Goldstein, con muy poco juicio, es

$$\sigma_T = \int d\Omega \sigma(\theta) \quad (\text{notación Goldstein}). \quad (15)$$

La integral de  $\sigma$  da otro  $\sigma$ . Esto inclina las cosas en favor de la notación de Landau, en donde esta ecuación se leería, con mucha más coherencia, como

$$\sigma_T = \int d\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (\text{notación Landau}). \quad (16)$$

Más sensatamente, con esta notación la integral de  $d\sigma$  da  $\sigma_T$ . Nos atendremos a la notación de Landau. Quedan avisados por si en algún libro ven otra cosa. El asunto no es tan grave, después de todo.

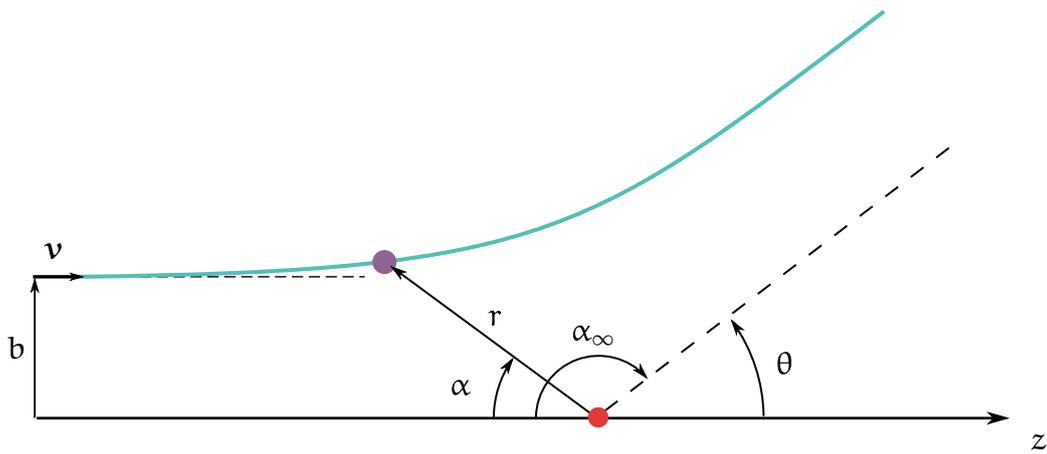
## 2. El cálculo llevado a los hechos

Para encontrar la sección eficaz,

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|, \quad (17)$$

todo lo que necesitamos calcular es la función  $b(\theta)$ . Sin embargo, en la práctica lo que tenemos es un esquema general para calcular  $\theta(b)$ , de modo que, por lo general, se impone invertir esta función.

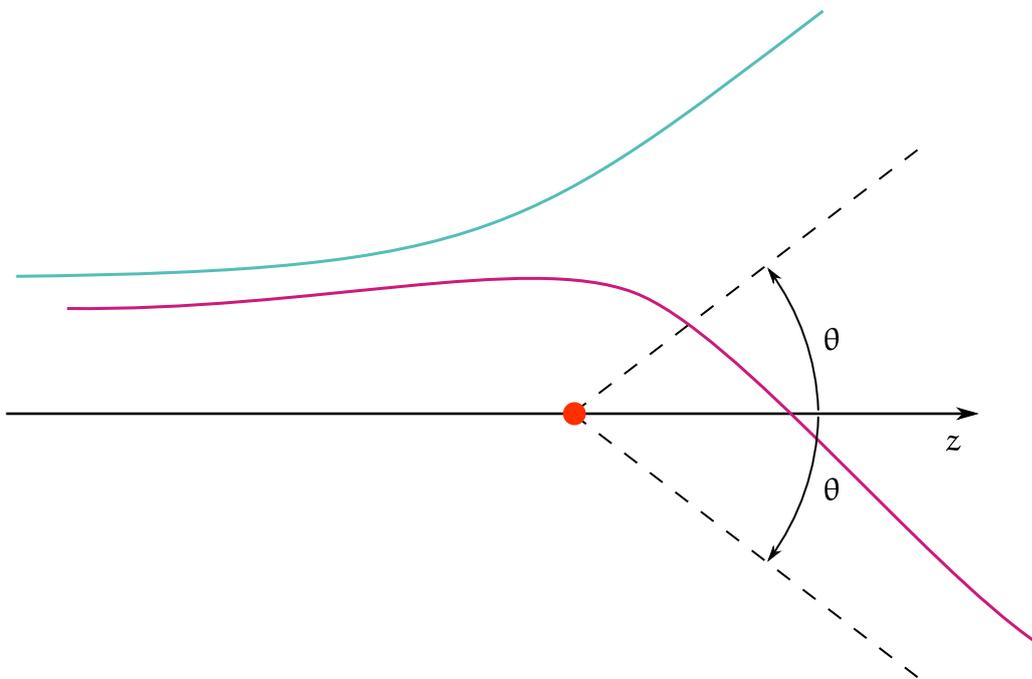
Debido a la simetría de rotación, para encontrar el ángulo de dispersión es suficiente considerar el movimiento de una partícula en un plano cualquiera que pase por el centro de fuerzas. Consideremos una partícula en el haz incidente con parámetro de impacto  $b$ . En el problema bidimensional, debido nuevamente a la simetría de rotación, alcanza con considerar  $b > 0$ . La geometría del problema es la que muestra la figura.



Es conveniente introducir un nuevo ángulo para describir la órbita de la partícula, tal como si resolviéramos un problema de fuerzas centrales en las coordenadas polares  $r$  y  $\alpha$ . Definimos  $\alpha$  como el ángulo medido desde la dirección inicial, según muestra la figura anterior. Notar que el ángulo que buscamos es

$$\theta = |\pi - \alpha_\infty|, \quad (18)$$

donde  $\alpha_\infty$  es el ángulo que da la dirección de la partícula cuando  $t \rightarrow \infty$ . Asumimos que  $\alpha_\infty$  se expresa como un ángulo entre  $0$  y  $2\pi$ . El valor absoluto es necesario en la ec. (18), como lo hace patente la siguiente figura: las dos trayectorias dan lugar al mismo valor de  $\theta$ , que por definición está siempre entre  $0$  y  $\pi$ . Pero en un caso es  $\theta = \pi - \alpha_\infty$  y en el otro  $\theta = \alpha_\infty - \pi$ .

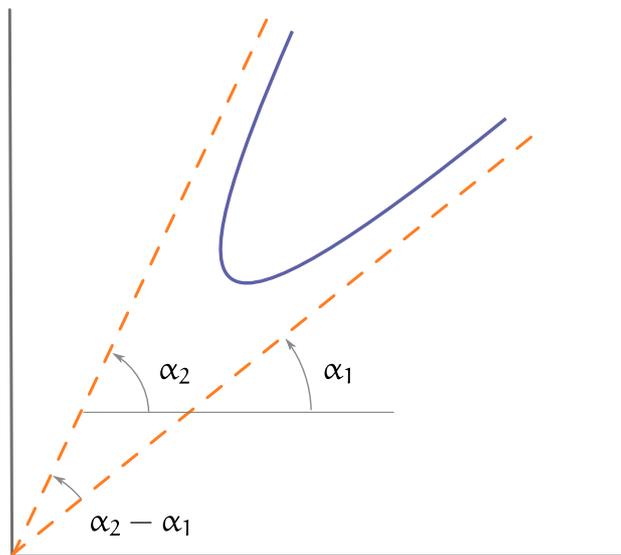


En la práctica, para calcular  $\alpha_\infty$  uno se encuentra con tres situaciones:

- Existen contados casos en los que uno conoce la solución de la ecuación de la órbita,  $r(\alpha)$ . Para encontrar el ángulo  $\alpha_\infty$  basta con buscar las soluciones de la ecuación

$$r(\alpha)^{-1} = 0 \quad [\text{es decir } r(\alpha) \rightarrow \infty]. \quad (19)$$

Una de las soluciones corresponderá a  $\alpha = 0$  y la otra a  $\alpha_\infty$ . Hay que hacer la salvedad de que es común que la ecuación de la órbita se haya deducido con una elección de ejes que no se ajuste al problema de dispersión. Por ejemplo, es usual escribir la ecuación de la órbita eligiendo  $\alpha = 0$  como el ángulo en el que  $r$  es mínimo. En el caso general, sea esta o no la elección de la orientación, el ángulo  $\alpha_\infty$  siempre puede escribirse como la diferencia (módulo  $2\pi$ ) entre las dos raíces de la ecuación (19), como en la figura.



- Más frecuente es que uno no tenga a mano  $r(\alpha)$  sino  $\alpha(r)$ , que es una función bivaluada de  $r$ . En esta situación, para hallar  $\alpha_\infty$  habrá que considerar la rama que corresponde al alejamiento de la partícula del centro de fuerzas y evaluarla en  $r \rightarrow \infty$ , siempre que la asíntota de acercamiento se haya definido en  $\alpha = 0$ . Si no, valen los mismos reparos que en el párrafo anterior.
- Por último, si las ecuaciones  $r(\alpha)$  o  $\alpha(r)$  no son conocidas de antemano, y no hay interés en encontrarlas, la alternativa más sencilla es integrar la ecuación diferencial de la órbita entre  $t \rightarrow -\infty$  y  $t \rightarrow \infty$ . Notar que el objetivo no es encontrar el valor de  $\alpha$  para todo  $t$ , sino únicamente para  $t \rightarrow \infty$ . Esto suele ser más simple que resolver la ecuación de la órbita en general. Además, la integral en  $t$  se reemplaza por una integral en  $r$ .

En lo que sigue veremos cómo proceder en esta última situación, que es la más común.

Nos interesa la órbita de la partícula. Los parámetros que la determinan son la energía y momento angular. Estas cantidades están definidas por las condiciones iniciales,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2, \quad l = mvb. \quad (20)$$

Recordarán que la ecuación diferencial de la órbita se obtiene a partir de la ecuación de conservación de la energía para el problema unidimensional equivalente, cambiando de variable independiente de  $t$  a  $\alpha$ . Eso se hace mediante la ecuación de conservación del momento angular. En menos de lo que tardan en leer este párrafo, deberían poder escribir la ecuación de la órbita como

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\alpha} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2m}{l^2} [\mathcal{E} - V(r)]. \quad (21)$$

De aquí

$$d\alpha = \pm \mathcal{G}(r) dr, \quad (22)$$

donde

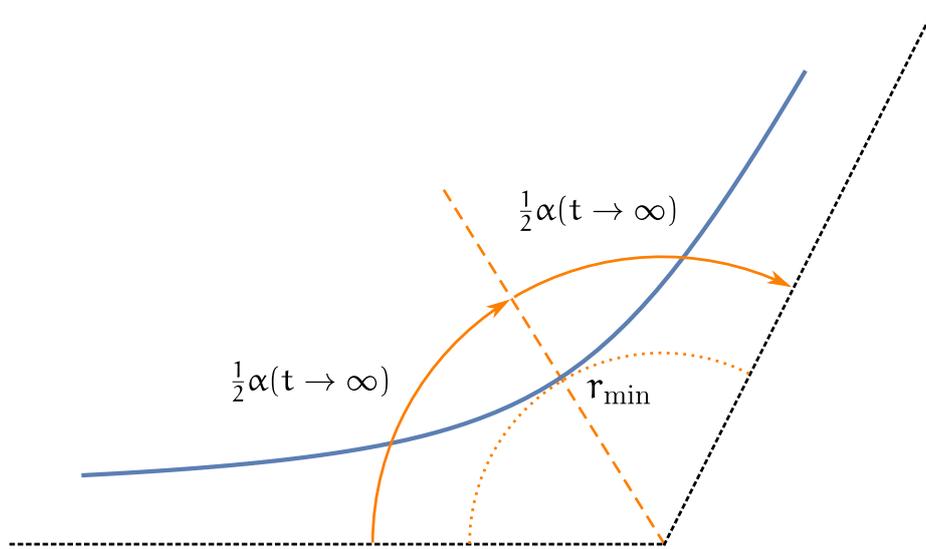
$$\mathcal{G}(r) = \frac{1/r^2}{\sqrt{\frac{2m}{l^2} [\mathcal{E} - V(r)] - \frac{1}{r^2}}}. \quad (23)$$

Inicialmente, cuando la partícula está infinitamente lejos del centro dispersor,  $r \rightarrow \infty$  y  $\alpha = 0$ . El radio evoluciona de manera monótona desde  $r \rightarrow \infty$  para  $t \rightarrow -\infty$  hasta  $r_{\min}$  para  $t = 0$  (digamos) y luego desde  $r_{\min}$  nuevamente hasta  $r \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Si queremos integrar la ec. (22) para calcular  $\alpha(r)$  debemos tener el cuidado de separar la función en dos ramas. Para cada valor de  $r$  habrá dos valores de  $\alpha$ . Durante la etapa de acercamiento, para  $t$  entre menos infinito y cero, habrá que tomar el signo negativo en el segundo miembro de la ec. (22), debido a que  $\alpha$  aumenta mientras  $r$  disminuye. Análogamente, durante la etapa de alejamiento, para  $t$  entre cero e infinito, corresponde tomar el signo positivo. Cuando sea necesario, el signo menos puede usarse para invertir los extremos de integración. En definitiva queda

$$\alpha(r) = \begin{cases} -\int_{\infty}^r \mathcal{G}(r) dr, & t \leq 0; \\ -\int_{\infty}^{r_{\min}} \mathcal{G}(r) dr + \int_{r_{\min}}^r \mathcal{G}(r) dr, & t \geq 0. \end{cases} \quad (24)$$

Evidentemente, durante la primera mitad de la trayectoria el vector que da la posición de la partícula barre el mismo ángulo que durante la segunda mitad. El dibujo de la órbita es simétrico respecto de la recta  $\alpha = \alpha(r_{\min})$ .



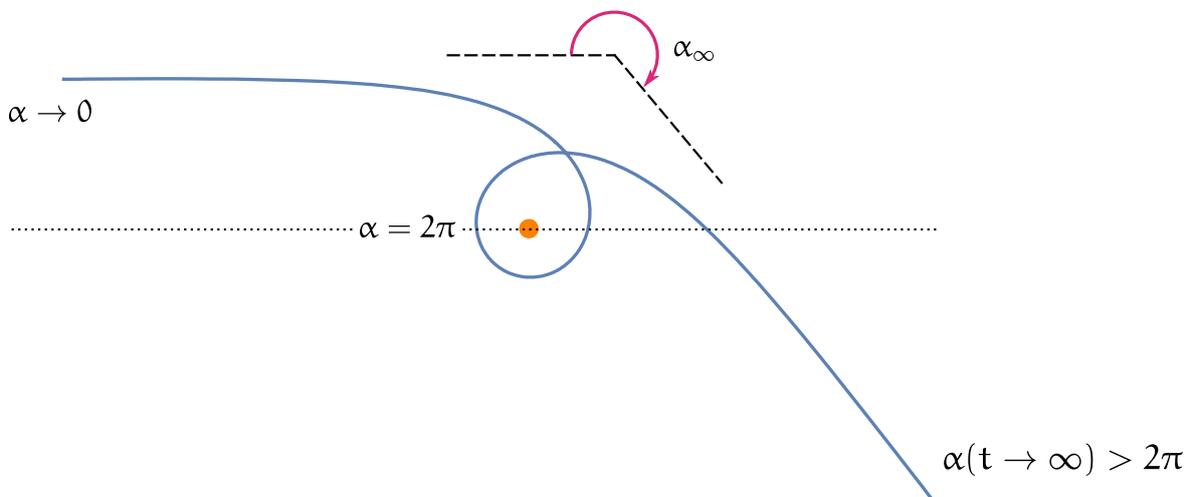
En definitiva,

$$\alpha(t \rightarrow \infty) = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr/r^2}{\sqrt{\frac{2m}{l^2} [\mathcal{E} - V(r)] - \frac{1}{r^2}}}. \quad (25)$$

Usando la ec. (20), es decir,  $l = mvb$ , para escribir  $l^2$  en términos de  $\mathcal{E}$ , obtenemos

$$\alpha(t \rightarrow \infty) = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{\mathcal{E}} - \frac{b^2}{r^2}}}. \quad (26)$$

Ahora bien, cuando calculamos el ángulo de dispersión  $\theta$ , definimos un ángulo  $\alpha_{\infty}$  que estaba entre  $0$  y  $2\pi$ . En cambio  $\alpha(t \rightarrow \infty)$  puede ser arbitrariamente grande, debido a que la partícula puede dar muchas vueltas alrededor del centro dispersor antes de escapar. Es posible tener órbitas como la que muestra la siguiente figura, en donde la partícula da más de una vuelta alrededor del centro de dispersión.



El ángulo  $\alpha_\infty$  que buscamos es lo que sobra de  $\alpha(t \rightarrow \infty)$  cuando le restamos el número entero de vueltas que dio la partícula. En otras palabras,

$$\alpha_\infty = \alpha(t \rightarrow \infty) \text{ mód } 2\pi = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{\varepsilon} - \frac{b^2}{r^2}}} \text{ mód } 2\pi. \quad (27)$$

La operación mód  $2\pi$  indica que hay que tomar el resto de la división por  $2\pi$ , de modo que  $\alpha_\infty$  sea un ángulo entre 0 y  $2\pi$ .

En resumen: nótese que no tuvimos que resolver la ecuación de la órbita. Lo único que nos interesó fue encontrar  $\alpha_\infty$ , de modo que es suficiente calcular la integral (27). Van a objetar que para calcular (27) necesitan la primitiva y que tanto hubiera dado calcular la órbita completa, ec. (24). La siguiente sección contesta a eso.

## 2.1. Una nota práctica

En la sección anterior dimos una fórmula para la ecuación de la órbita completa, ec. (24), que reescrita por extenso se lee como

$$\alpha(r) = \begin{cases} \int_r^{\infty} \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{\varepsilon} - \frac{b^2}{r^2}}}, & t \leq 0; \\ \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{\varepsilon} - \frac{b^2}{r^2}}} + \int_{r_{\min}}^r \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{\varepsilon} - \frac{b^2}{r^2}}}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (28)$$

Según hemos dicho, necesitamos mucho menos que eso. Lo único que nos interesa es la integral que aparece en la ec. (27),

$$\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{\varepsilon} - \frac{b^2}{r^2}}}. \quad (29)$$

Podría pensarse que no hay una gran simplificación entre calcular la integral (29) y calcular las integrales que aparecen en (28). Después de todo –se lamenta uno– no nos vamos a salvar de tener que calcular la integral

$$\int \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{\varepsilon} - \frac{b^2}{r^2}}}. \quad (30)$$

Que tengamos que calcular esta primitiva es usualmente cierto (aunque no siempre), pero en tal caso la vamos a evaluar en puntos muy especiales, a saber,  $r \rightarrow \infty$  y  $r = r_{\min}$ . Estarán de acuerdo en que tomar el límite  $r \rightarrow \infty$  suele ser tarea fácil y simplificadora. Lo que no es tan evidente es que evaluar la primitiva en  $r_{\min}$  es igual de simplificador.

Según veremos, ni siquiera suele ser necesario calcular  $r_{\min}$ , como parecería indicar la ec. (29). Esta es una cuenta molesta, porque requiere buscar las raíces de la ecuación

$$1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{\mathcal{E}} = 0, \quad (31)$$

lo que es engorroso aunque se trate de una simple cuadrática. Notar que la condición que define  $r_{\min}$  es la anulación de lo que está dentro de la raíz en las ecs. (29) y (30). Lo que está dentro de esas raíces es proporcional a  $r^2$ , de ahí que busquemos su anulación para encontrar  $r_{\min}$ . Lo que sucede en la práctica es que para evaluar la primitiva (30) en  $r_{\min}$  lo único que es necesario saber de  $r_{\min}$  es que satisface la ec. (31). Lo veremos con un ejemplo.

## 2.2. Un ejemplo: la fórmula de Rutherford

Consideremos el caso de la dispersión por un potencial  $V(r) = k/r$ , con  $k > 0$ . Primero aplicaremos la fórmula general (27), donde

$$\alpha(t \rightarrow \infty) = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{k}{r\mathcal{E}} - \frac{b^2}{r^2}}}. \quad (32)$$

A partir de esta ecuación, cambiando de variables de  $r$  a  $u = 1/r$  y completando cuadrados dentro de la raíz, resulta

$$\alpha(t \rightarrow \infty) = 2 \int_0^{u_{\max}} \frac{b^2 du}{\sqrt{a^2 + b^2 - (b^2 u + a)^2}}, \quad (33)$$

donde definimos la longitud característica de la interacción para partículas de energía  $\mathcal{E}$ ,

$$a = \frac{k}{2\mathcal{E}}. \quad (34)$$

Notar que, así como  $r_{\min}$  anula lo que está dentro de la raíz en la ec. (32),  $u_{\max} = r_{\min}^{-1}$  es un valor de  $u$  que anula lo que está dentro de la raíz cuadrada en la ec. (33),

$$a^2 + b^2 - (b^2 u_{\max} + a)^2 = 0, \quad \text{o} \quad \frac{b^2 u_{\max} + a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1. \quad (35)$$

(Al tomar la raíz corresponde tomar el signo positivo). La integral en la ec. (33) es elemental,

$$\int du \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{A}. \quad (36)$$

Es decir,

$$\alpha(t \rightarrow \infty) = 2 \int_0^{u_{\max}} \frac{b^2 du}{\sqrt{a^2 + b^2 - (b^2 u + a)^2}} = 2 \arcsin \left( \frac{b^2 u + a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \Bigg|_0^{u_{\max}}. \quad (37)$$

El resultado de evaluar la diferencia en ambos límites de integración es

$$\alpha(t \rightarrow \infty) = 2 \arcsin \left( \frac{b^2 u_{\max} + a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) - 2 \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (38)$$

Esta expresión es intimidante, sobre todo si pensamos que todavía nos falta averiguar  $u_{\max}$ . Pero en realidad el argumento del primer arco seno es 1,

$$\frac{b^2 u_{\max} + a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1, \quad (39)$$

porque es la ecuación que debe satisfacer  $u_{\max} = r_{\min}^{-1}$ . Finalmente, esto es lo que queríamos ilustrar: que no hace falta calcular  $r_{\min}$ , sino sólo saber qué ecuación satisface. Luego,

$$\alpha(t \rightarrow \infty) = 2 \arcsin 1 - 2 \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pi - 2 \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (40)$$

Este ángulo está entre 0 y  $\pi$ , de forma que no es necesario tomar mód  $2\pi$  para calcular  $\alpha_{\infty}$ , directamente es  $\alpha_{\infty} = \alpha(t \rightarrow \infty)$ . Así,

$$\theta(b) = |\pi - \alpha_{\infty}| = 2 \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (41)$$

Podríamos usar una identidad trigonométrica, pero sigamos el camino directo: a partir de aquí escribimos  $b^2$  como función de  $\theta$ ,

$$b^2(\theta) = \left[ \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-2} - 1 \right] a^2 = \left( \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) a^2. \quad (42)$$

La ec. (42) es útil para calcular la sección eficaz diferencial debido a que

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{db^2(\theta)}{d\cos \theta} \right|. \quad (43)$$

Así no tenemos que tomar la raíz y podemos derivar directamente respecto de  $\cos \theta$ . Resulta

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{a^2}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{k^2}{16\epsilon^2} \left( \csc \frac{\theta}{2} \right)^4 = \left( \frac{k}{2mv^2} \right)^2 \left( \csc \frac{\theta}{2} \right)^4, \quad (44)$$

que es la conocida fórmula de Rutherford.

■ Hay más de una manera de encontrar  $\alpha_{\infty}$ . Lo que hicimos antes corresponde a calcular  $\alpha(r)$ . Pero si ya conocemos la ecuación de la órbita,  $r(\alpha)$ , podemos usarla igualmente para calcular  $\alpha_{\infty}$ . Esto es lo que hicieron en la teórica. En el caso del potencial coulombiano repulsivo es

$$r(\alpha) = \frac{l^2/mk}{e \cos \alpha - 1}, \quad (45)$$

donde  $\alpha$  se toma igual a cero en el punto que corresponde al radio mínimo, y donde

$$e = \sqrt{1 + \frac{2l^2 \mathcal{E}}{mk^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (46)$$

Las direcciones asintóticas se obtienen buscando los valores de  $\alpha$  que anulen el denominador. En este caso es

$$\alpha_{\pm} = \pm \arccos \frac{1}{e}. \quad (47)$$

El ángulo entre las dos asíntotas es  $\alpha_{\infty}$ . Luego,

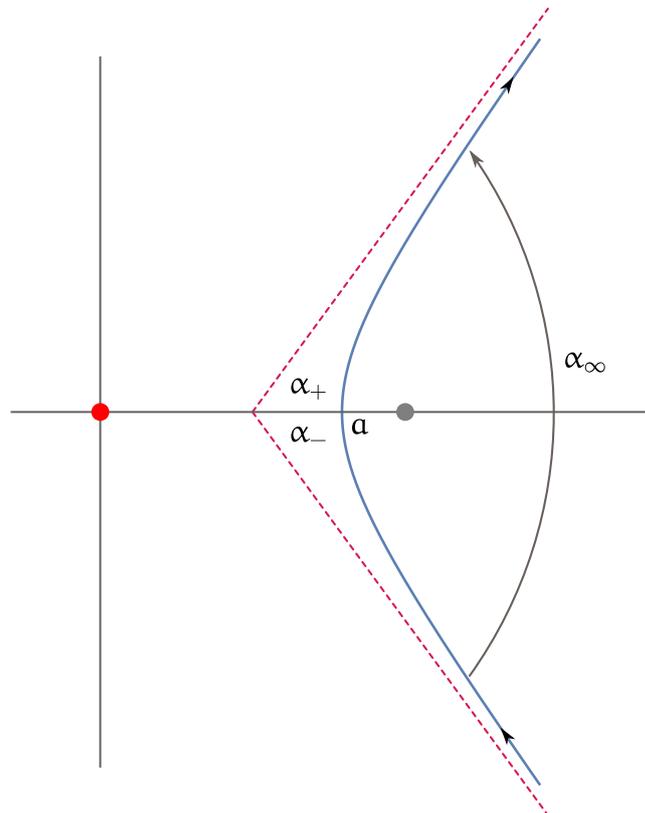
$$\alpha_{\infty} = 2 \arccos \frac{1}{e}. \quad (48)$$

Usando la relación

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad (49)$$

encontramos, igual que en la ec. (40),

$$\alpha_{\infty} = \pi - \arcsin \frac{1}{e}. \quad (50)$$



### 2.3. Otra nota práctica

En última instancia no es esencial tener a la vista las identidades trigonométricas. Lo que simplificó el cálculo no es tanto eso sino el hecho de que alcanzara con calcular  $b^2$ . La siguiente nota captura estas simplificaciones. El truco que usamos para no tener que tomar la raíz cuadrada de la ec. (42) suele usarse con frecuencia. Puesto que en la expresión de la sección eficaz diferencial aparece

$$b \frac{db}{d\theta} \quad (51)$$

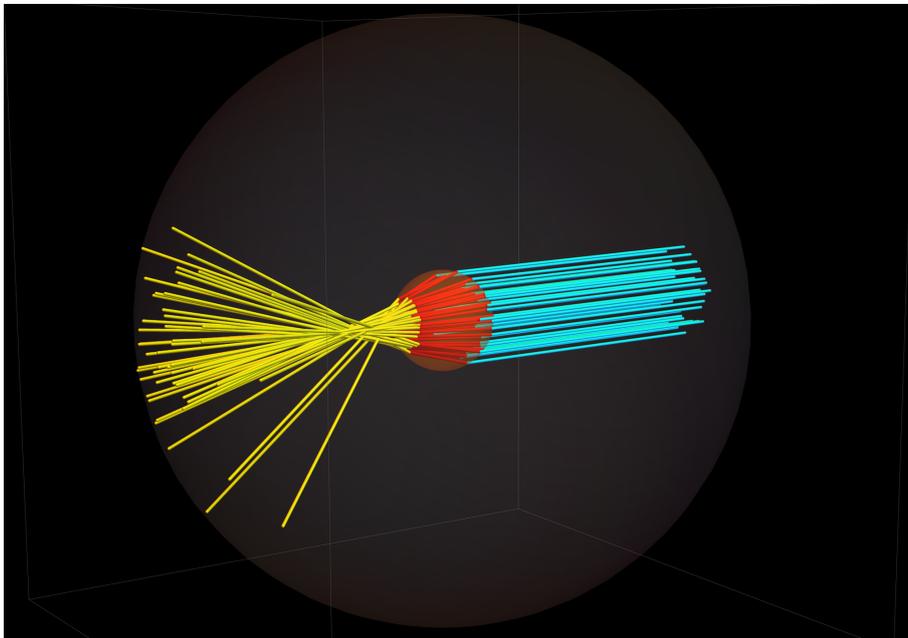
podemos transformar eso en

$$\frac{1}{2} \frac{db^2}{d\theta}. \quad (52)$$

Entonces basta con calcular  $b^2$ . Más aún, si lo que se tiene de manera inmediata es  $b$  como función del coseno de  $\theta$ , puede escribirse

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = b \left| \frac{db}{d\cos \theta} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{db^2}{d\cos \theta} \right|. \quad (53)$$

### 3. Problema 7. El pozo de potencial.

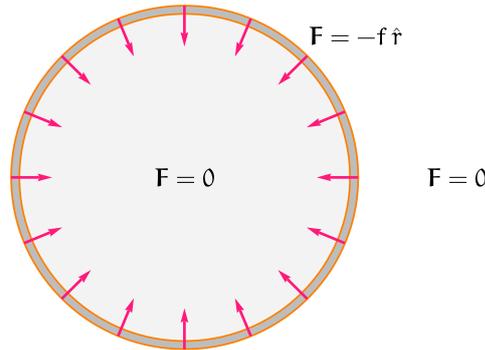


El potencial es:

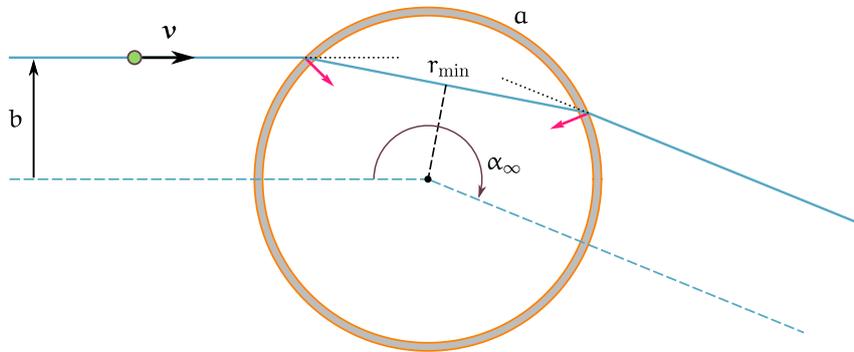
$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r > a \\ -U, & \text{si } r \leq a, \end{cases} \quad (U > 0). \quad (54)$$

Las únicas partículas dispersadas son las que tienen parámetro de impacto  $b < a$ . (En el enunciado de la guía, un poco incomprensiblemente, el radio del pozo es  $a/2$ ).

Para entender cómo se mueven las partículas que atraviesan el pozo, en lugar de pensar en una frontera en donde el potencial es discontinuo, pensemos que la transición entre  $V = 0$  y  $V = -U$  tiene lugar de forma lineal entre  $r = a - \epsilon$  y  $r = a$ . Para  $\epsilon \rightarrow 0$  recuperamos el problema idealizado del pozo con frontera de extensión infinitamente pequeña. Pensar al potencial con una frontera de espesor  $\epsilon$  nos permite asociarle una fuerza bien definida. Esa fuerza es radial. El campo de fuerzas tendrá el aspecto que muestra la figura.



Las partículas que crucen la frontera experimentarán una fuerza en la dirección radial, dirigida hacia el centro. Esto sucederá tanto al entrar como al salir del pozo de potencial. La trayectoria de una partícula de prueba debe ser como muestra la siguiente figura.



Ahora calcularemos la sección eficaz diferencial mediante dos métodos distintos. El primero será a través de la aplicación directa de la ec. (27),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|, \\ \theta(b) = |\pi - \alpha_{\infty}(b)|, \\ \alpha_{\infty}(b) = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr / r^2}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{\mathcal{E}} - \frac{b^2}{r^2}}} \text{ mód } 2\pi. \end{array} \right. \quad (55)$$

Siguiendo este método podemos prescindir de toda figura, como quería Lagrange.

### 3.1. Primer método

Para calcular  $\alpha_\infty$  siguiendo el método general debemos calcular la integral que aparece en la ec. (55). Debido a que el potencial es discontinuo, hay que dividir el intervalo de integración en dos regiones: la primera, cuando la partícula está fuera del pozo, con  $r > a$ ; y la segunda, cuando la partícula está adentro del pozo, con  $r$  entre  $a$  y  $r_{\min}$ :

$$\alpha_\infty = 2 \int_a^\infty \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}} + 2 \int_{r_{\min}}^a \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 + \frac{U}{\varepsilon} - \frac{b^2}{r^2}}}. \quad (56)$$

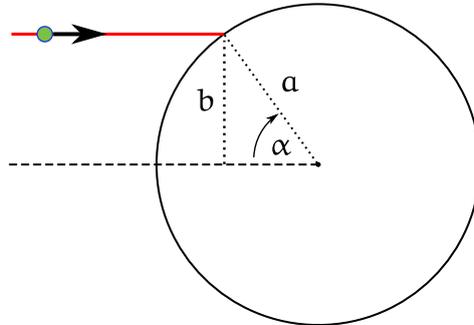
Más adelante quedará justificada la omisión de la operación mód  $2\pi$ . Notar que la condición que define  $r_{\min}$  es la anulación del argumento que está dentro de la segunda raíz

$$1 + \frac{U}{\varepsilon} - \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0, \quad \text{o} \quad \frac{b/r_{\min}}{\sqrt{1 + \frac{U}{\varepsilon}}} = 1. \quad (57)$$

Con el cambio de variable  $u = b/r$ , la primera integral en la ec. (56) está dada por

$$\alpha = \int_a^\infty \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}} = \int_0^{b/a} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin \frac{b}{a}. \quad (58)$$

Esta ecuación tiene una interpretación gráfica directa: dice que el seno del ángulo barrido por el radio vector de la partícula mientras se acerca desde el infinito hasta que llega a la frontera del pozo de potencial es  $b/a$ , lo que es obvio en la figura.



Para calcular la segunda integral en la ec. (56) seguimos más o menos los mismos pasos:

$$\int_{r_{\min}}^a \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 + \frac{U}{\varepsilon} - \frac{b^2}{r^2}}} = \int_{a^{-1}}^{r_{\min}^{-1}} \frac{b du}{\sqrt{1 + \frac{U}{\varepsilon} - b^2 u^2}} = \arcsin \left( \frac{b/r_{\min}}{\sqrt{1 + U/\varepsilon}} \right) - \arcsin \left( \frac{b/a}{\sqrt{1 + U/\varepsilon}} \right). \quad (59)$$

Pero, por definición,  $r_{\min}$  es tal que el argumento del primer arco seno es igual a 1. Luego,

$$\int_{r_{\min}}^a \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 + \frac{U}{\varepsilon} - \frac{b^2}{r^2}}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{a n}, \quad (60)$$

donde

$$n = \sqrt{1 + \frac{U}{\varepsilon}}. \quad (61)$$

Reuniendo los dos resultados (58) y (60), tenemos

$$\alpha_{\infty} = \pi + 2 \arcsin \frac{b}{a} - 2 \arcsin \frac{b}{an}. \quad (62)$$

Para energías  $\varepsilon \gg U$ ,  $n \simeq 1$ ,  $\alpha_{\infty} \simeq \pi$ , y las partículas pasan casi sin desviarse. En cambio, para energías  $\varepsilon \ll U$ ,  $n \rightarrow \infty$  y

$$\alpha_{\infty} \simeq \pi + 2 \arcsin \frac{b}{a}, \quad (63)$$

que puede ser tan grande como  $2\pi$ , cuando  $b \rightarrow a$ , pero no mayor que  $2\pi$ . En general,

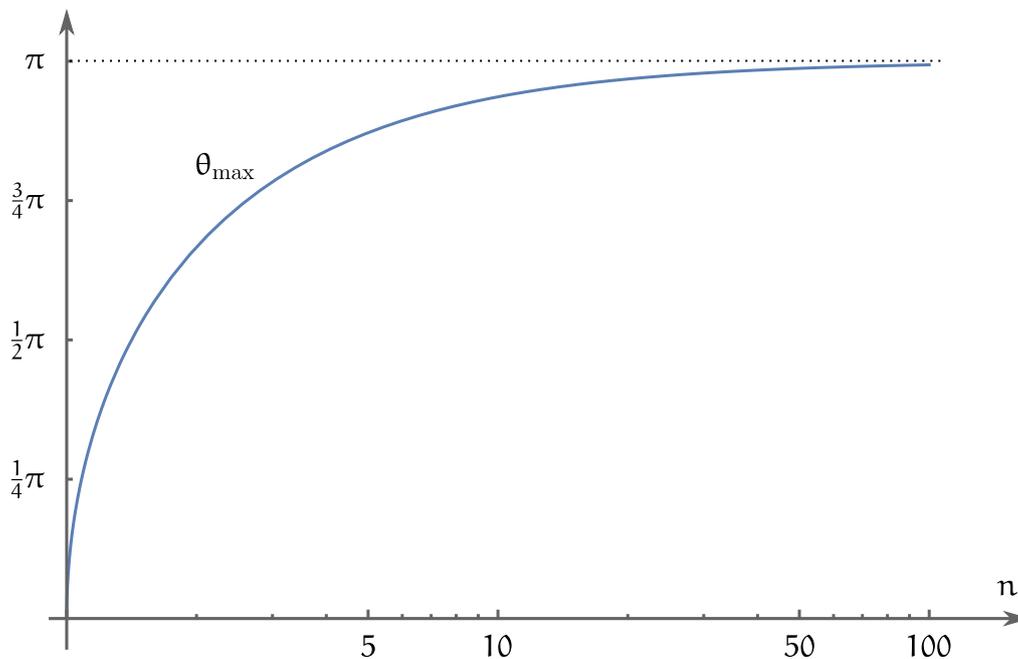
$$\pi \leq \alpha_{\infty} \leq 2\pi. \quad (64)$$

Esto justifica que no hayamos incluido la operación mód  $2\pi$  al escribir la fórmula para  $\alpha_{\infty}$ . Sin embargo, va a ser importante tomar el valor absoluto al calcular  $\theta$ ,

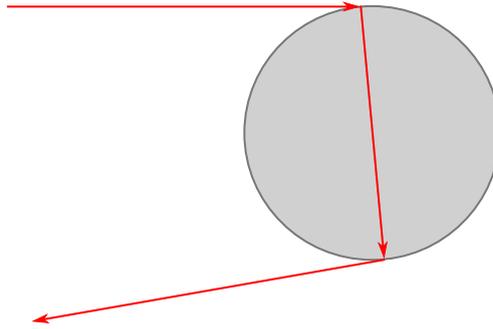
$$\theta = |\pi - \alpha_{\infty}| = 2 \left( \arcsin \frac{b}{a} - \arcsin \frac{b}{an} \right). \quad (65)$$

Ustedes pueden verificar que para cada valor de  $n$  hay un valor máximo del ángulo de dispersión, que se alcanza cuando  $b = a$  y vale

$$\theta_{\max}(n) = \pi - 2 \arcsin \frac{1}{n}. \quad (66)$$



Cuando la profundidad del pozo es muy grande, esto es lo que ocurre para las partículas que pasan casi rasantes:



Para calcular la sección eficaz diferencial, necesitamos la función  $b(\theta)$ . Para eso, a partir de la ec. (65),

$$\theta = |\pi - \alpha_\infty| = 2 \left( \arcsin \frac{b}{a} - \arcsin \frac{b}{an} \right), \quad (67)$$

tenemos que despejar  $b$  como función de  $\theta$ . A simple vista parece imposible, pero no es tal. Definamos  $x = b/a$ . Dividiendo por 2, tomando el coseno, y usando la fórmula para el coseno de la suma, encontramos

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}} + \frac{x^2}{n}. \quad (68)$$

Es fácil deshacerse de las raíces cuadradas. Pasando el último término al primer miembro y elevando al cuadrado, queda

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{x^4}{n^2} - 2 \cos \frac{\theta}{2} \frac{x^2}{n} = 1 + \frac{x^4}{n^2} - x^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right). \quad (69)$$

Finalmente, luego de unos pocos pasos que ustedes pueden completar,

$$b^2 = \frac{a^2 n^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + n^2 - 2n \cos \frac{\theta}{2}}. \quad (70)$$

Por suerte, para calcular  $d\sigma/d\Omega$  no es necesario tomar la raíz cuadrada de esta ecuación, porque, según ya notamos antes,

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2 \sin \theta} \left| \frac{db^2}{d\theta} \right|. \quad (71)$$

De todas maneras, el cálculo es un poco tedioso. Notemos primero que la ec. (65) implica que  $d\theta/db \geq 0$ . En efecto,

$$\frac{d\theta}{db} = \frac{2}{a} \frac{\sqrt{n^2 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{(n^2 - x^2)(1 - x^2)}}. \quad (72)$$

Por lo tanto, no hará falta tomar el valor absoluto al calcular  $d\sigma/d\Omega$ .

Definiendo momentáneamente  $y = \theta/2$ , derivando y simplificando factores comunes,

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{2 \sin \theta} \frac{db^2}{d\theta} = \frac{a^2 n^2}{4 \cos y} \left[ \frac{(1 + n^2) \cos y - n - n \cos^2 y}{(1 + n^2 - 2n \cos y)^2} \right]. \quad (73)$$

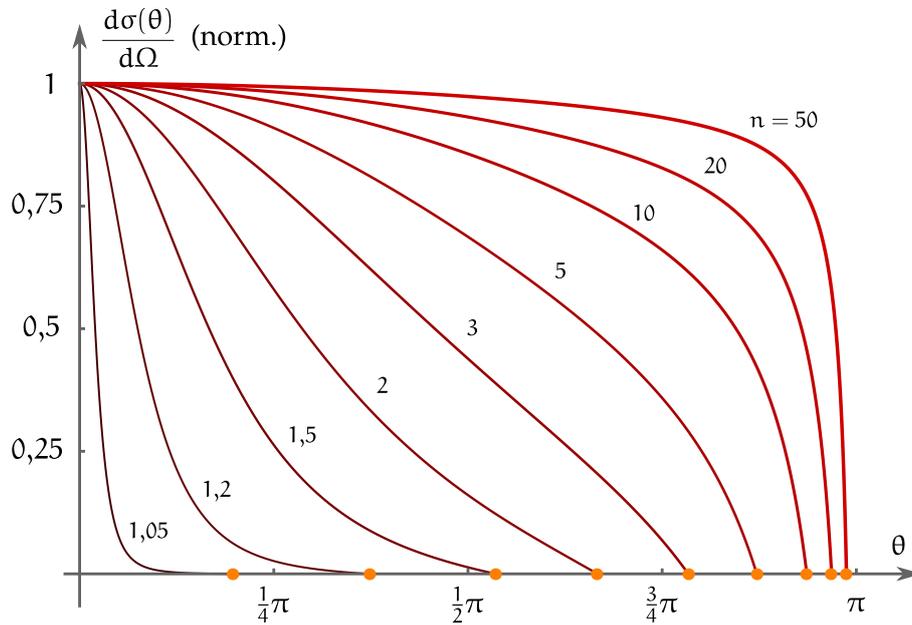
El numerador puede simplificarse un poco más. El resultado final es

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{\theta}{2}} \frac{\left( n - \cos \frac{\theta}{2} \right) \left( n \cos \frac{\theta}{2} - 1 \right)}{\left( 1 + n^2 - 2n \cos \frac{\theta}{2} \right)^2}. \quad (74)$$

Esta función es decreciente. Alcanza su valor máximo en  $\theta = 0$ , donde vale

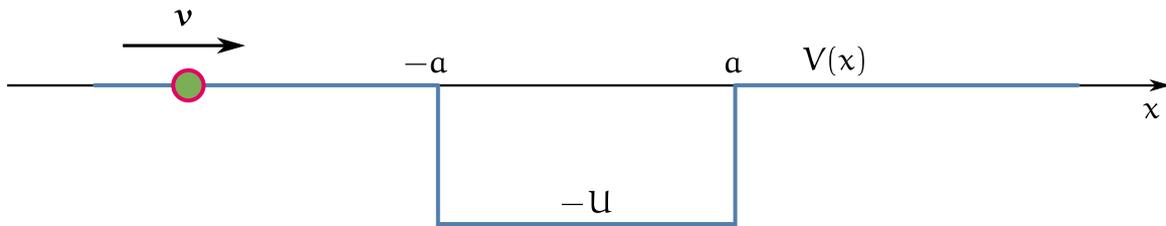
$$\frac{d\sigma(0)}{d\Omega} = \left( \frac{n/2}{n-1} \right)^2. \quad (75)$$

Esto diverge para  $n \rightarrow 1$ , lo que es de esperar porque el haz pasa sin desviarse. La gráfica de  $d\sigma/d\Omega$  para distintos valores de  $n$  es como muestra la figura. Cada curva ha sido normalizada según el valor de su máximo en el origen. Notar que para  $n \gg 1$  la distribución tiende a ser uniforme.



### 3.2. Segundo método

Este será un método análogo al de la óptica geométrica. Nos iremos acercando al problema del pozo esférico tridimensional con casos análogos en una y dos dimensiones. Entonces, para entender cómo se mueven las partículas que entran al pozo de potencial, veamos primero lo que sucede en un sistema unidimensional.

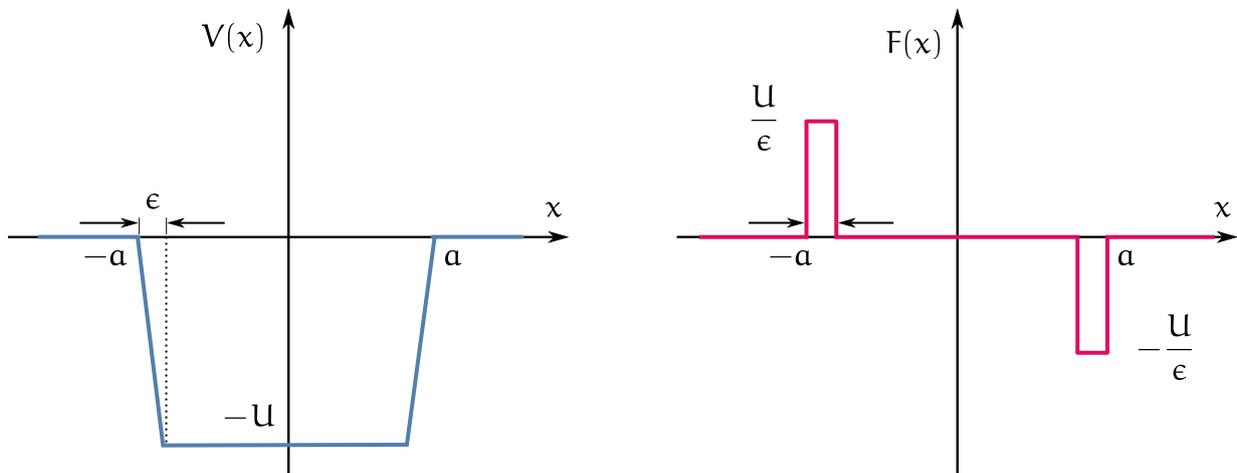


El potencial es constante por tramos. Analizado en términos de la conservación de la energía, el problema es trivial. Si la partícula se acerca al pozo con velocidad  $v$ , dentro del pozo su velocidad estará dada por

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{pozo}}^2 - U \Rightarrow v_{\text{pozo}} = \sqrt{v^2 + \frac{2U}{m}} = v\sqrt{1 + \frac{U}{\varepsilon}}. \quad (76)$$

Al atravesar la frontera, la velocidad varía súbitamente entre  $v$  y  $v_{\text{pozo}}$ . Quiere decir que hay una fuerza que la empuja hacia el interior del pozo. El análisis en términos de la energía nos exige de tener que definir una fuerza para un potencial discontinuo. Pero para pensar el problema del pozo esférico será útil hacer un análisis en términos de esta fuerza, aunque no se defina como una función ordinaria.

En el problema unidimensional, la fuerza es cero salvo en los puntos  $x = \pm a$ . Calcular la fuerza a través de la derivada de  $V(x)$  es una operación que debe hacerse siguiendo algún proceso de límite. Podemos aproximar el pozo de potencial tanto como queramos si introducimos una longitud  $\epsilon$  dentro de la cual el potencial varíe linealmente entre  $-U$  y  $0$ .

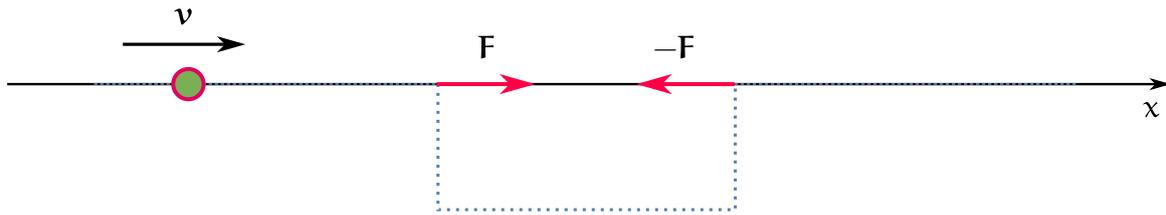


Entonces dentro de ese intervalo la fuerza es

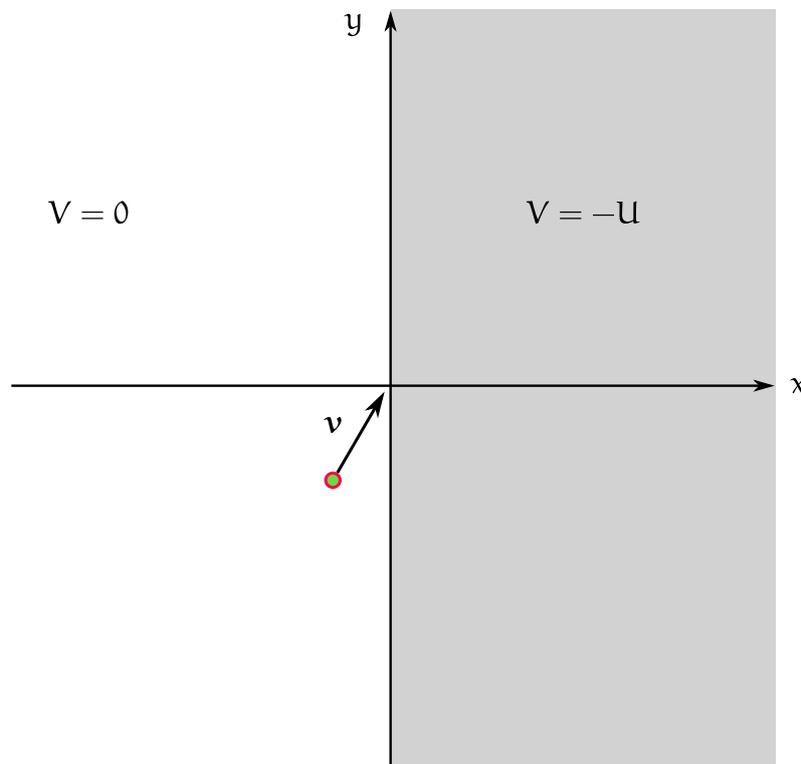
$$F_\epsilon(x) = -V'(x) = \pm \frac{U}{\epsilon}, \quad (77)$$

donde el signo positivo corresponde a la frontera izquierda del pozo y el signo negativo a la frontera derecha. Tal como esperábamos, cuando cruza la frontera, sobre la partícula se ejerce una fuerza que tiende a empujarla hacia el pozo. Es lo único que necesitamos recordar. Aún en el caso de una frontera de espesor cero, el gradiente (se escriba como se escriba) tiene que ser negativo a la izquierda y positivo a la derecha, y la fuerza (sea lo que

sea) tiene que tener los signos contrarios. El campo de fuerzas tiene que ser como el que muestra la figura.



Supongamos ahora que la partícula se mueve en un plano. En la región  $x \leq 0$  el potencial es cero mientras que en la región  $x > 0$  el potencial es  $-U$ . Supongamos además que la partícula se mueve desde la región  $x < 0$  como muestra la figura.



Ahora el principio de conservación de la energía es insuficiente para determinar el movimiento de la partícula una vez que entra en la región  $x > 0$ . Lo único que podemos decir es que si la velocidad fuera del pozo es

$$\mathbf{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}, \quad (78)$$

la velocidad dentro del pozo será constante y tendrá componentes

$$\mathbf{v}' = v'_x \hat{x} + v'_y \hat{y}, \quad (79)$$

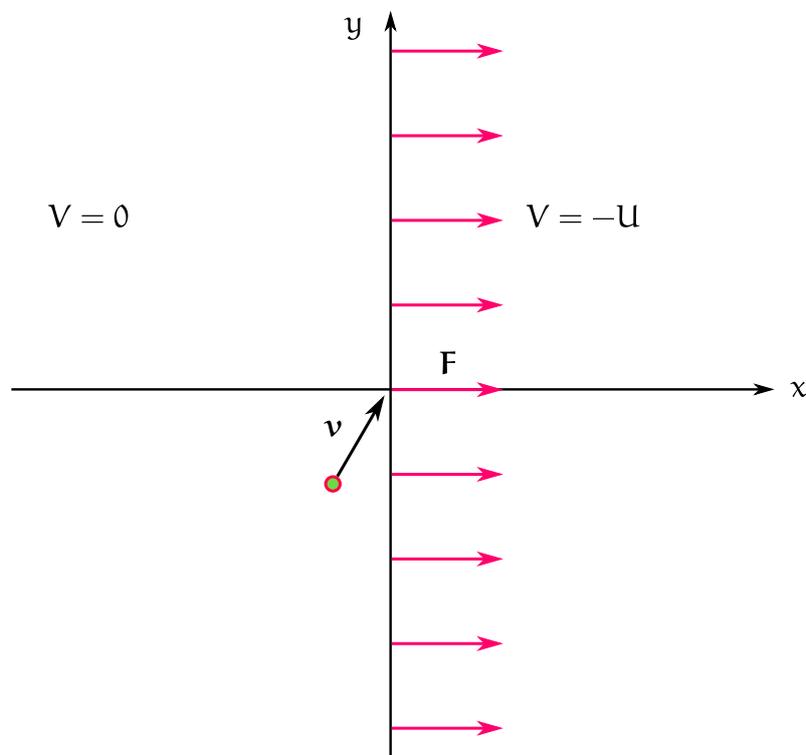
tales que, por conservación de la energía,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 - U \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 + \frac{2U}{m}} = v\sqrt{1 + \frac{U}{\mathcal{E}}} = vn, \quad (80)$$

donde hemos definido

$$n = \sqrt{1 + \frac{U}{\varepsilon}}. \quad (81)$$

La ec. (80) nos dice cómo cambia el módulo de la velocidad, pero no cómo cambian sus componentes individuales. La observación fundamental radica de nuevo en pensar al problema en términos de una fuerza que se construye a través de un límite. El potencial sólo depende de la coordenada  $x$ , de modo que la fuerza en la dirección  $y$  será cero. Se escriba como se escriba, la derivada del potencial respecto de  $x$  será negativa en la frontera. Por lo tanto, la fuerza que actuará sobre la partícula al atravesar la frontera estará en la dirección  $x$  y apuntará hacia la derecha, tal como muestra la figura.



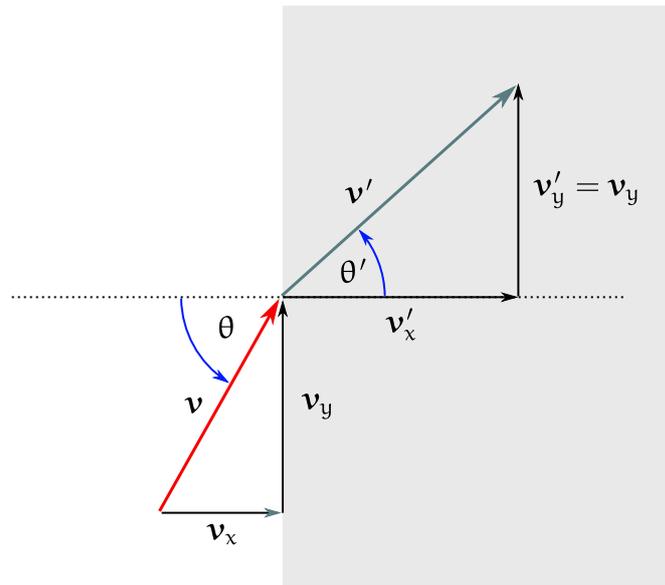
Si no hay fuerza en la dirección  $y$ , la velocidad en la dirección  $y$  es constante,

$$v'_y = v_y. \quad (82)$$

Con esta información, la ecuación de conservación de la energía es suficiente para calcular la velocidad final en la dirección  $x$ . En efecto,

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y^2) - U \Rightarrow v'_x = \sqrt{v_x^2 + \frac{2U}{m}}. \quad (83)$$

La forma eficaz de resumir estos resultados consiste sencillamente en expresar la constancia de la velocidad tangencial a la interfase, ec. (82), lo que da lugar a una interpretación gráfica análoga a la ley de Snell en óptica.



Si definimos los ángulos  $\theta$  y  $\theta'$  como en la figura anterior, la igualdad de las componentes “y” de las velocidades implica

$$v \sin \theta = v' \sin \theta'. \quad (84)$$

Ahora bien, debido a que  $v' = nv$ , podemos reescribir esto como

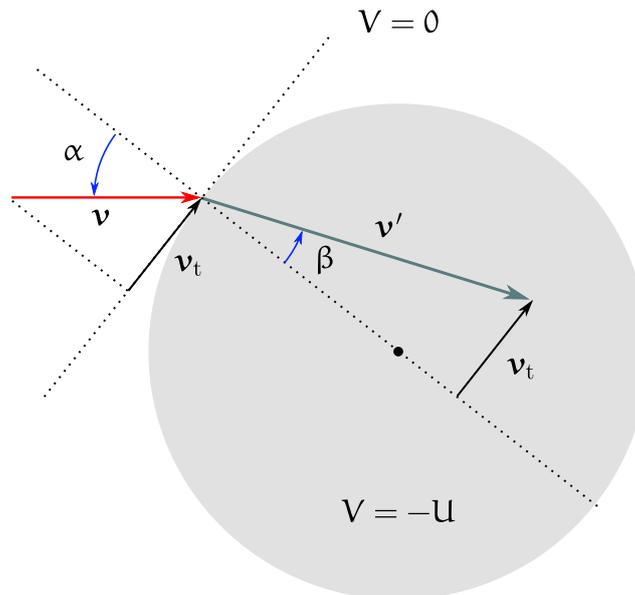
$$\sin \theta = n \sin \theta'. \quad (85)$$

Naturalmente, para un pozo de potencial ( $U > 0$ ) es  $n > 1$  y resulta  $\theta' < \theta$ . La velocidad tangencial de la partícula se conserva pero aumenta su velocidad normal a la interfase. La velocidad se desvía hacia la normal a la interfase. Para una barrera de potencial ( $U < 0$ ) ocurre lo contrario. Finalmente observemos que la ecuación anterior quiere decir que la dirección de movimiento de la partícula satisface una ley análoga a la ley de Snell,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (86)$$

En el problema del pozo esférico ocurre una situación similar. La partícula dentro de cada región siempre se mueve en línea recta. Los únicos momentos durante su trayectoria en los que experimenta una fuerza es al atravesar la superficie  $r = a$ .

El potencial tiene simetría esférica, de forma que genera una fuerza radial (de nuevo podemos pensar en un proceso de límite). La derivada de  $V(r)$  en  $r = a$  (se escriba como se escriba) debe ser positiva. La fuerza estará en la dirección de  $-\hat{r}$ , es decir, empujará a la partícula hacia el centro del pozo. Esta fuerza es de tipo impulsiva. Lo único relevante es que la fuerza es radial, actúa durante una distancia infinitamente pequeña y está dirigida hacia el centro. Como no hay fuerza en las direcciones tangenciales a la frontera del pozo, la velocidad tangencial no cambia. Pero la fuerza radial desvía la dirección de la trayectoria hacia el centro del potencial, como muestra la figura siguiente.



La conservación de la componente tangencial de la velocidad se expresa como

$$v \sin \alpha = v' \sin \beta, \quad (87)$$

donde  $v$  es la velocidad inicial de la partícula y  $v'$  es la velocidad dentro del pozo de potencial. Luego de atravesar la superficie, la componente tangencial de la velocidad sigue siendo la misma, pero su componente radial y el módulo de la velocidad habrán cambiado. De acuerdo a la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 - U \Rightarrow v' = v\sqrt{1 + \frac{U}{\mathcal{E}}}. \quad (88)$$

El ángulo que la velocidad de la partícula forma con la dirección radial luego de cruzar la frontera satisface entonces la ecuación

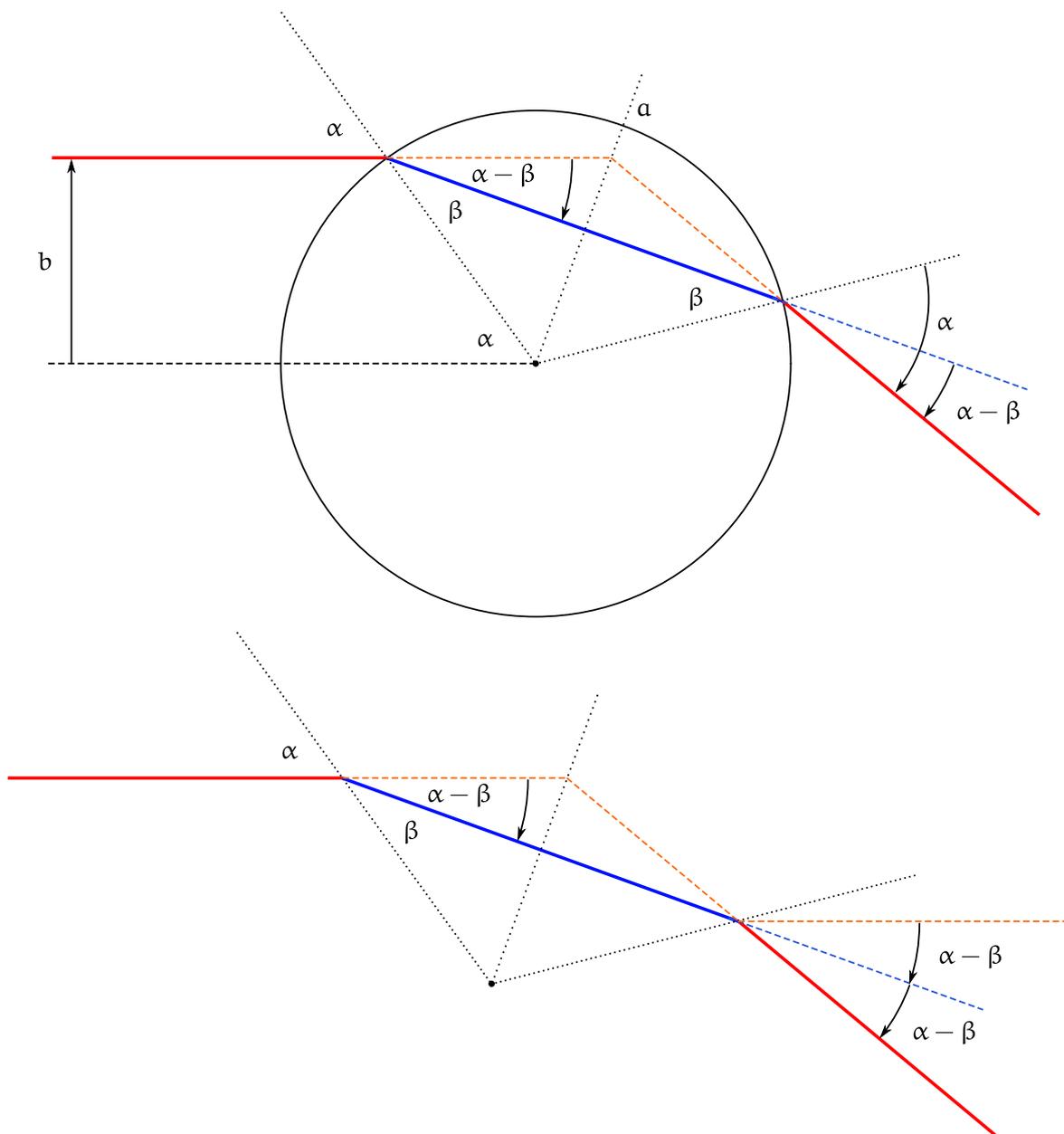
$$\sin \beta = \frac{v}{v'} \sin \alpha = \frac{1}{n} \sin \alpha, \quad (89)$$

donde, nuevamente,

$$n = \sqrt{1 + \frac{U}{\mathcal{E}}}. \quad (90)$$

En nuestro caso, puesto que  $n$  es mayor que 1, el seno del ángulo de transmisión es menor que el de incidencia. Eso implica que la velocidad de la partícula se desvía hacia la dirección radial, lo que es natural, dada la naturaleza atractiva del potencial. Otra cosa previsible es que cuanto mayor es la energía,  $n$  es más cercano a 1, y menor es la desviación.

El proceso de refracción vuelve a producirse cuando la partícula abandona el pozo de potencial. La figura muestra la trayectoria completa a través del pozo de potencial.



Es fácil ver que la órbita es simétrica respecto de la dirección de mínimo acercamiento al origen. Como muestra la segunda figura, cada vez que la partícula cruza la frontera se desvía un ángulo

$$\Delta\theta = \alpha - \beta, \quad (91)$$

donde

$$\sin \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{b}{a}, \quad (92)$$

y donde, según la ley de refracción (89),

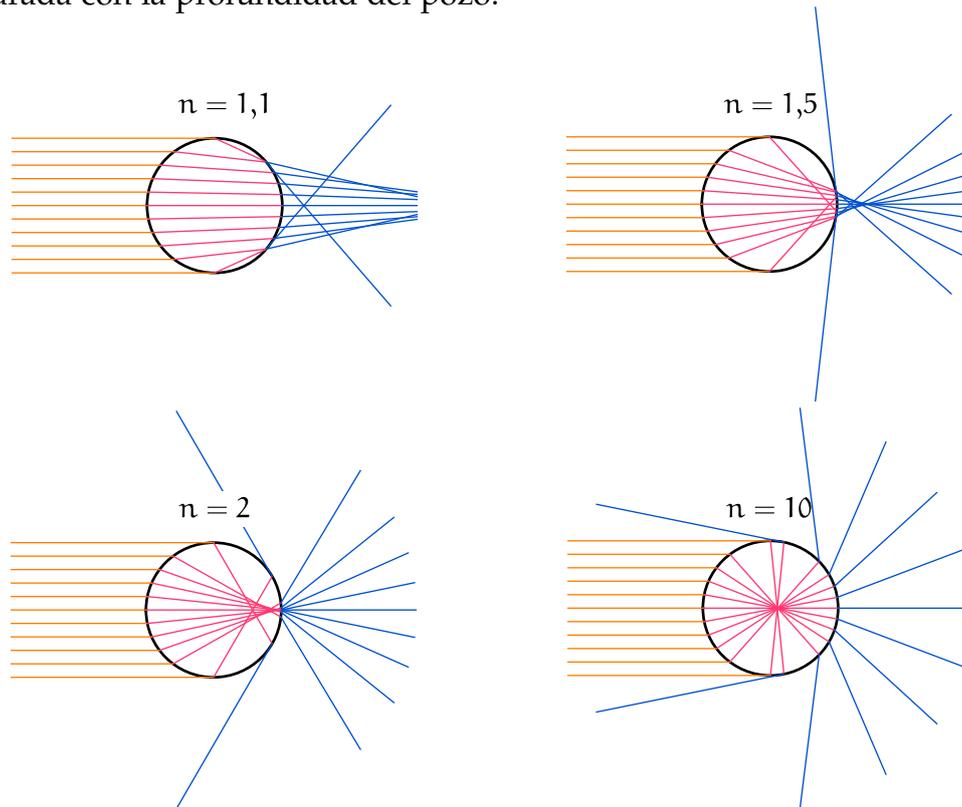
$$\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{b}{na}. \quad (93)$$

El ángulo neto de dispersión es

$$\theta = 2(\alpha - \beta) = 2 \left( \arcsin \frac{b}{a} - \arcsin \frac{b}{na} \right), \quad (94)$$

que coincide con la ec. (65). Desde aquí el cálculo de  $d\sigma/d\Omega$  continúa tal como vimos antes.

A partir de la construcción geométrica que hemos obtenido es sencillo dibujar las trayectorias de las partículas que atraviesan el pozo. Las siguientes figuras muestran distintos casos, dependiendo del valor de  $n$ . A mayor energía, más cercano a 1 es el valor de  $n$  y menor es la desviación. Valores grandes de  $n$  corresponden a partículas con una energía baja comparada con la profundidad del pozo.



### 3.3. Experimentos con números

En el archivo adjunto\* hay un notebook escrito en el programa *Mathematica* para calcular numéricamente la función  $d\sigma(\theta)/d\Omega$ .

Sobre una esfera de radio 1, se hacen incidir partículas con parámetros de impacto elegidos al azar. En lugar de tener una intensidad fija, lo que se tiene es un número fijo de partículas, como si en un experimento en lugar de medir la intensidad pusieran una placa fotográfica y sólo registrarán el número total de partículas emitidas o dispersadas.

El número total de partículas dispersadas en una dada dirección será proporcional al número total de partículas incidentes por unidad de área. La fórmula para la sección eficaz no necesita modificación. Lo que este experimento simula es la distribución aleatoria de las partículas del haz incidente. El ángulo de desviación se calcula a partir de la ec. (65).

\*[http://materias.df.uba.ar/mcaa2021c1/?attachment\\_id=1264](http://materias.df.uba.ar/mcaa2021c1/?attachment_id=1264)

El parámetro de impacto  $b$  se elige al azar entre 0 y 1. Más precisamente,  $b^2$  se elige al azar entre 0 y 1 con densidad de probabilidad uniforme. (¿Por qué  $b^2$  y no  $b$ ?). Se registran entonces los ángulos de desviación para cada partícula.

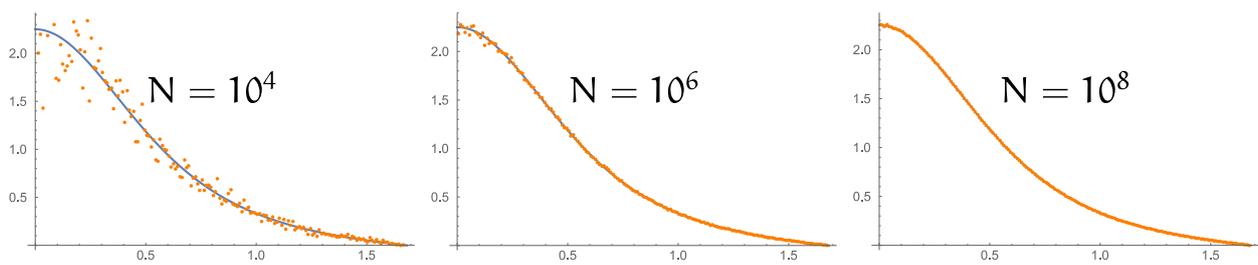
La magnitud fundamental para medir la intensidad dispersada es el número de partículas por unidad de ángulo sólido. Al hacer el cálculo numéricamente, no podemos usar intervalos infinitesimales, debemos elegir un intervalo angular  $\Delta$  y contar las partículas que fueron dispersadas entre los ángulos  $\theta$  y  $\theta + \Delta$ . Cuanto menor sea  $\Delta$ , más nos aproximaremos a la definición rigurosa de  $d\sigma/d\Omega$ . Pero también más error habrá, porque el número de partículas en un intervalo  $\Delta$  muy pequeño fluctuará enormemente, a menos que usemos una cantidad desmesurada de partículas. El valor de  $\Delta$  tiene que ser tal que en cada intervalo angular el número de partículas dispersadas sea mucho mayor que 1.

En el experimento numérico se elige de antemano el número de partículas  $N \gg 1$  que se arrojarán contra el centro dispersor. Se calculan los  $N$  ángulos de desviación y se busca el valor máximo  $\theta_{\max}$ . Al intervalo entre 0 y  $\theta_{\max}$  se lo divide en segmentos de longitud  $\Delta \ll \theta_{\max}$ . El segmento  $i$ -ésimo está limitado por los ángulos  $\theta_{i-1} = (i-1)\Delta$  y  $\theta_i = i\Delta$ , con  $i$  entre 1 y  $N_\Delta = \theta_{\max}/\Delta$ . Se cuentan cuántas partículas  $\Delta N_i$  fueron desviadas en el intervalo  $(\theta_{i-1}, \theta_i)$  con  $i$  entre 1 y  $N_\Delta$ . Luego se aproxima la sección eficaz como

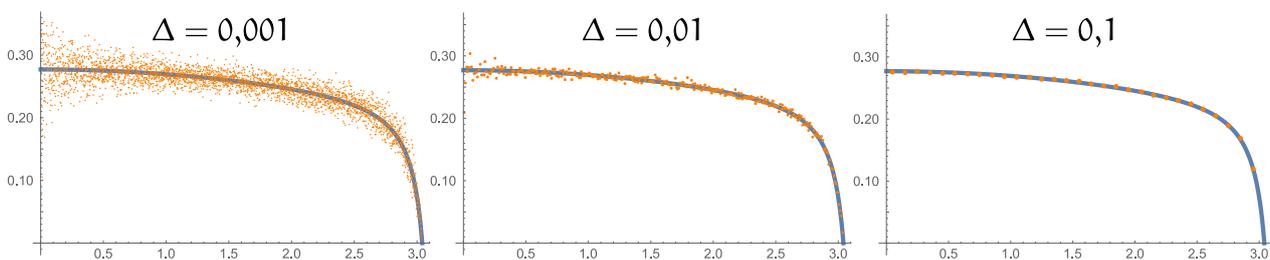
$$\frac{d\sigma(\theta_i)}{d\Omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N/(\pi a^2)} \frac{dN(\theta_i)}{d\Omega} \approx \frac{1}{N/(\pi a^2)} \frac{\Delta N_i}{2\pi \sin(\theta_i - \frac{1}{2}\Delta)}. \quad (95)$$

En la práctica, en lugar de asociar este valor al ángulo  $\theta_i$  se lo asocia al centro del intervalo,  $\theta_i - \Delta/2$ .

Las primeras tres figuras comparan el resultado numérico con la curva exacta, ec. (74) para valores crecientes de  $N$  con  $n = 1,5$ . De esta manera se ve la importancia de tomar un número considerable de partículas. En estos gráficos  $\Delta = 0,01$ .



Las siguientes figuras muestran el efecto de variar el intervalo  $\Delta$ , para  $N = 10^6$  y  $n = 20$ .



## 4. El problema inverso

En los experimentos de colisiones se conoce la intensidad  $I$  de las partículas incidentes y se mide la intensidad  $\mathcal{J}(\theta)$  de las partículas dispersadas en función del ángulo de dispersión. Es decir, se mide la sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{\mathcal{J}(\theta)}{I}. \quad (96)$$

Puesto que la sección eficaz diferencial puede calcularse como

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|, \quad (97)$$

los resultados experimentales permiten determinar la función  $b(\theta)$ . La pregunta es si eso alcanza para calcular  $V(r)$ .

La relación entre  $b(\theta)$  y la función  $V(r)$  está mediada por una inversión y una integral. Para obtener  $b(\theta)$  es necesario primero invertir  $\theta(b)$

$$\theta(b) = |\pi - \alpha_\infty(b)|. \quad (98)$$

En todo esto el potencial entra recién en el cálculo de  $\alpha_\infty$ ,

$$\alpha_\infty(b) = 2 \int_{r_{\min}(b)}^{\infty} \frac{b dr/r^2}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{\mathcal{E}} - \frac{b^2}{r^2}}} \text{ mód } 2\pi. \quad (99)$$

En definitiva, el resultado experimental  $d\sigma/d\Omega$  es una funcional de  $V(r)$ . En el problema inverso uno se propone encontrar la función  $V(r)$  conocida  $d\sigma/d\Omega$ . Claramente no se trata de una simple inversión de funciones. La sección eficaz diferencial depende de la función  $V(r)$  como un todo. En este y otros problemas inversos se usa la llamada transformación de Abel. Como en casi todos los problemas inversos, la solución no es única. Piensen, por ejemplo, si quisieran averiguar la forma de un objeto a partir de la sombra que proyecta.

No es nuestro objetivo ver estos temas aquí. Los que quieran consultar la solución del problema inverso de la dispersión pueden mirar el problema 7 de la sección 18 del libro de Landau, la sección 4.1.2 del libro de Jose y Saletan o el paper "A class of inverse problems in physics", este último en <http://dx.doi.org/10.1119/1.19530>. En la sección 12 del libro de Landau también figura el problema inverso de las oscilaciones en un potencial, en el que se aplican los mismos métodos.