

Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021

Clase práctica del lunes 7/6.

Guía 6. Ecuaciones de Hamilton. Retratos de fase.*

En 2022 1c agregué una nota al final

■ En estas notas resolveremos el Problema 1 de la Guía 6. Dos son los temas principales: escribir hamiltonianos y graficar sus retratos de fase. Los retratos de fase tienen que ser sólo cualitativamente correctos. No importa tanto la precisión con la que se grafiquen las trayectorias sino su topología. La idea es hacer lo que se pueda sin usar la computadora.

Los retratos de fase son el gráfico de las curvas integrales de las ecuaciones de Hamilton. Dicho en lenguaje llano: son el gráfico de las trayectorias que sigue el punto representativo del sistema en el espacio de fase para todas las condiciones iniciales posibles. Es claro que no podemos graficar todas las trayectorias, así como cuando graficamos las líneas del campo eléctrico no graficamos todas las líneas, sino un conjunto representativo.

Si el número de grados de libertad es n , la dimensión del espacio de fase es $2n$, de modo que sólo en el caso $n = 1$ podremos graficar el retrato de fase. Para sistemas con más grados de libertad, a lo sumo lo que podremos graficar será la proyección del retrato de fase sobre un volumen tridimensional o bidimensional. En problemas con más de un grado de libertad, ocurre a menudo que existen suficientes cantidades conservadas como para construir problemas unidimensionales para una o más de las coordenadas. En tales casos, puede trazarse el retrato de fase de ciertas coordenadas por separado.

El caso paradigmático de retrato de fase corresponde a un hamiltoniano de la forma

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (1)$$

En un sistema de este tipo, el hamiltoniano es una cantidad conservada a lo largo de la trayectoria del sistema. Por lo tanto, las curvas integrales de las ecuaciones de Hamilton coinciden con las curvas de nivel de la función $H(q, p)$. Graficar el retrato de fase, en este caso, es equivalente a graficar las curvas de nivel de H . Las curvas de nivel están definidas implícitamente por ecuaciones de la forma

$$H(q, p) = E. \quad (2)$$

Como la única cosa distintiva en estos sistemas es el potencial $V(q)$, bastará saber cómo construir el retrato de fase para un $V(q)$ genérico.

Pero antes de pasar a ese punto, es importante notar que, para ciertos potenciales $V(q)$, las curvas de nivel de la función $H(q, p)$ corresponden a ecuaciones conocidas. El caso más simple es el del oscilador armónico. Ahí

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (3)$$

*zanellaj@df.uba.ar

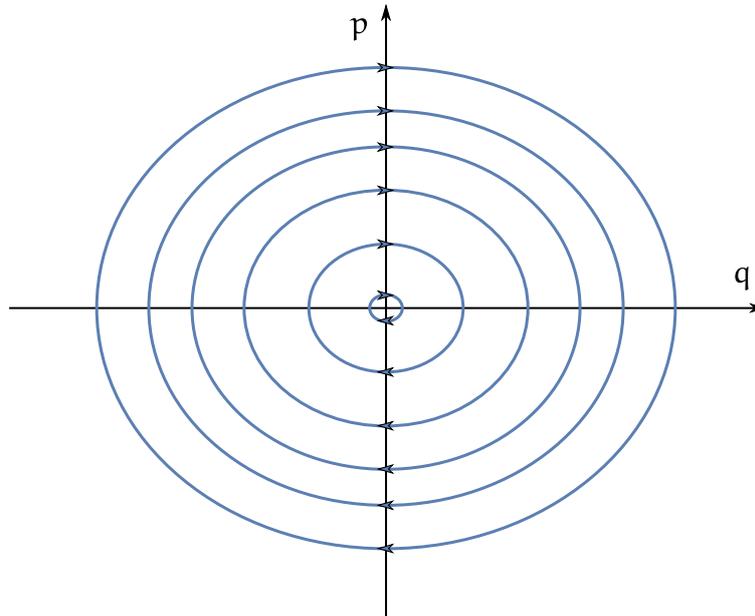
De manera que las ecuaciones implícitas de las curvas de nivel son

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E. \quad (4)$$

No es necesario ningún procedimiento especial para graficar la curva de nivel correspondiente, puesto que reconocemos inmediatamente la ecuación de una elipse,

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\omega^2} = 1. \quad (5)$$

Las curvas de nivel forman un conjunto de elipses semejantes, todas con la misma relación de aspecto, como muestra la figura.



Notarán que hemos asignado una dirección de recorrido a cada curva. Para este tipo de hamiltonianos, esa dirección es muy fácil de entender. Sabemos que

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (6)$$

de manera que para $p > 0$ el sentido en el que son recorridas las trayectorias debe ser tal que q se mueva hacia la derecha. Recíprocamente, por debajo del eje $p = 0$, el sentido de las trayectorias ha de ser hacia valores de q decrecientes. Dicho en otras palabras: por encima del eje $p = 0$, las flechitas deben apuntar hacia la derecha, y por debajo del eje, hacia la izquierda.

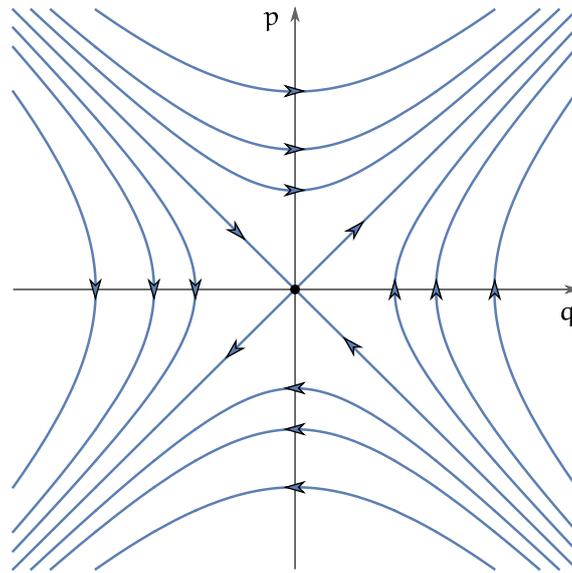
Otro caso que no requiere un análisis especial es el potencial

$$V(q) = -\frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (7)$$

En este caso las curvas de nivel también corresponden a una ecuación conocida:

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E \quad (8)$$

es la ecuación de una hipérbola. Para dibujar el retrato de fase hay que contemplar las tres posibilidades: $E > 0$, $E = 0$ y $E < 0$. El retrato de fase es como muestra la figura.



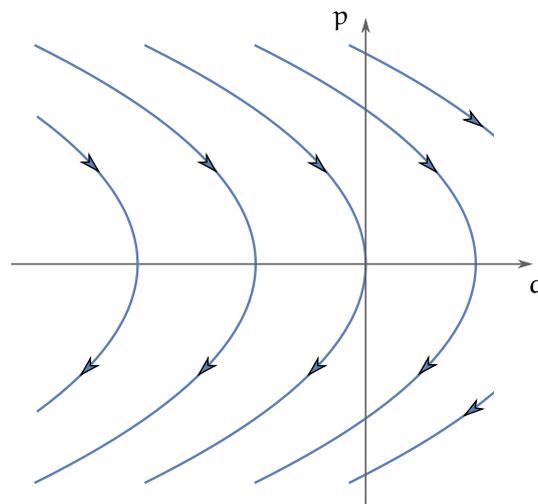
Potenciales del tipo $V(q) = aq^2 + bq$ pueden reducirse a los dos casos anteriores completando cuadrados.

No se me ocurre ningún otro potencial que dé curvas de nivel cuyas ecuaciones implícitas resulten familiares, salvo, quizá, el potencial lineal $V(q) = kq$, digamos con $k > 0$,

$$\frac{p^2}{2m} + kq = E. \quad (9)$$

Uno está acostumbrado a graficar $p(q, E)$, pero resulta obvio que en este caso lo inmediato es graficar $q(p, E)$. Hay que girar la cabeza 90 grados:

$$q(p, E) = \frac{E}{k} - \frac{p^2}{2mk}. \quad (10)$$



Con esto creo que hemos agotado los casos triviales.

Consideremos por lo tanto un potencial genérico, como el que muestra la figura de abajo. Dado el hamiltoniano

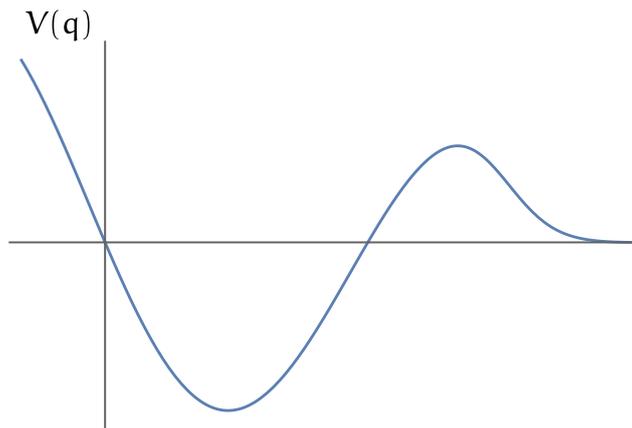
$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad (11)$$

para graficar el retrato de fase habría que despejar $p(q, E)$ y graficar las dos ramas de esa función explícitamente,

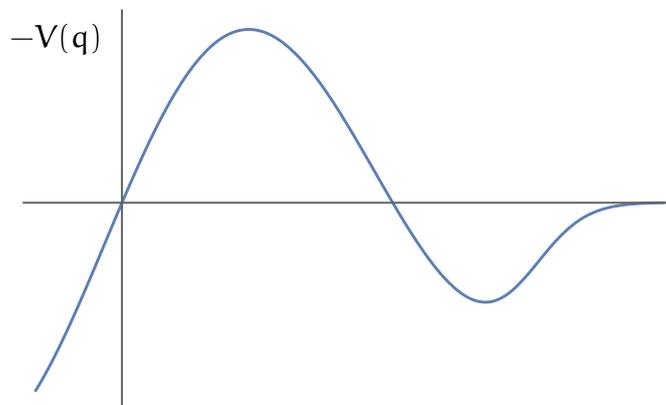
$$p(q, E) = \pm \sqrt{2m} \sqrt{E - V(q)}. \quad (12)$$

Ahora bien, se trata de hacer esto de manera cualitativa, sin tener que usar la computadora. Resulta que existe un procedimiento sencillo para trazar las curvas de nivel de un tal hamiltoniano. Basta tener en cuenta un par de cosas. Vayamos construyendo la rama positiva de la función $p(q, E)$ en la ec. (12) paso a paso.

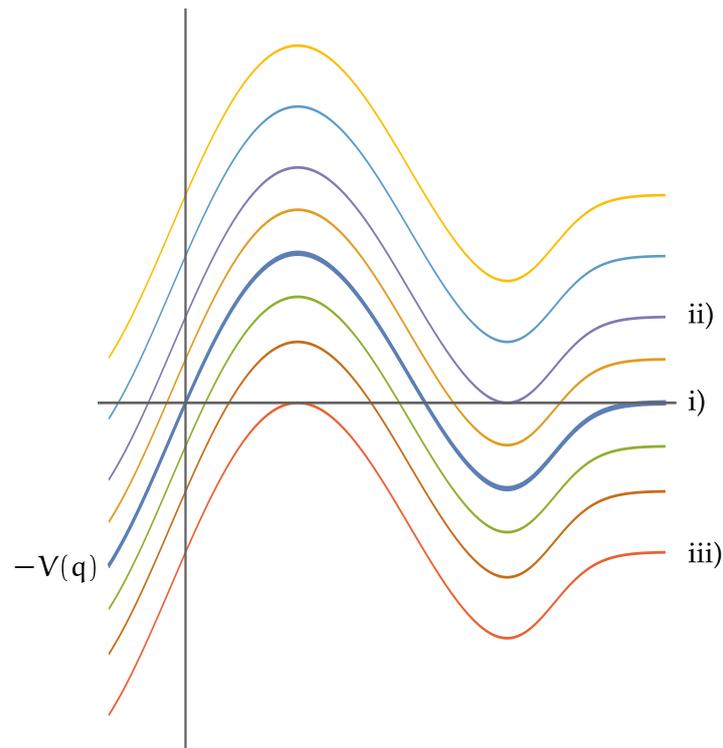
- Se dibuja primero la función $V(q)$.



- Ahora se dibuja la función $-V(q)$.

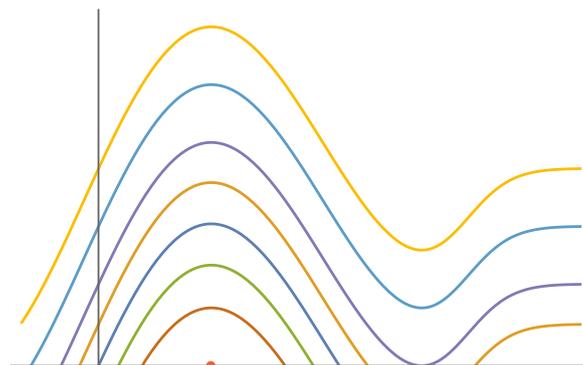


- Sumando la constante E , a partir del dibujo anterior se reproduce la curva $-V(q)$ a distintas alturas, $E_1 - V(q)$, $E_2 - V(q)$, etc. En esta instancia importarán ciertos valores especiales de E . Por ejemplo, tienen importancia los valores de E que corresponden a mínimos o máximos del potencial o a sus valores asintóticos. Con esto queda construido un conjunto de curvas para la función $E - V(q)$. Como después vamos a tomar la raíz cuadrada de esta función, no tiene sentido dibujar curvas que queden completamente por debajo del eje q .



Hay aquí tres valores especiales de E . i) El valor asintótico del potencial cuando $q \rightarrow \infty$, que es cero. ii) El valor del potencial en el máximo local. iii) El valor del potencial en el mínimo local.

- Como ahora hay que tomar la raíz cuadrada, las regiones en donde las curvas $E - V(q)$ estén por debajo del eje q , es decir, donde sea $E - V(q) < 0$, se borran del dibujo. De la curva que sólo tiene un punto de contacto con el eje q conservamos ese punto.



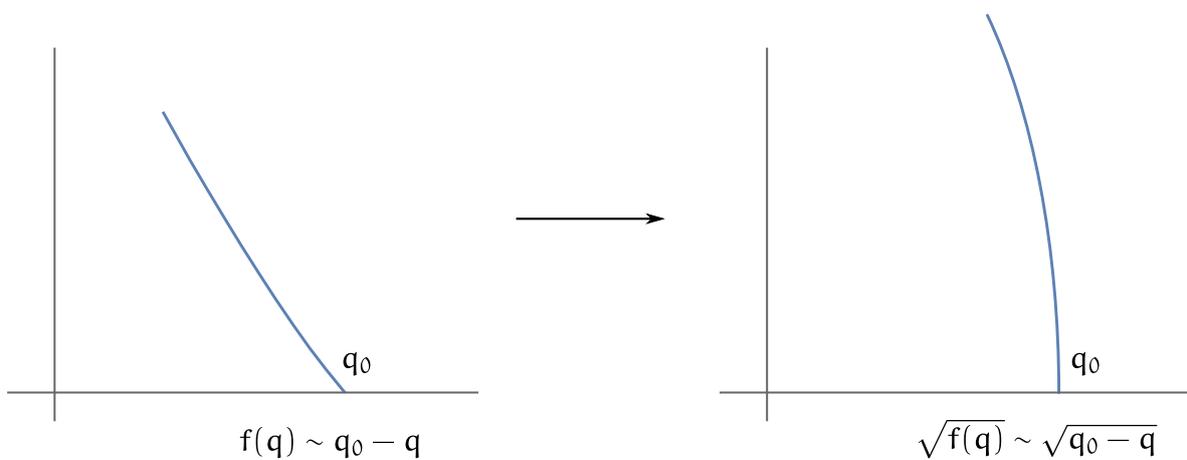
- Hasta aquí hemos graficado $E - V(q)$. Ahora hay que tomar la raíz cuadrada. Al hacerlo, la forma de las funciones cualitativamente no cambia. El cuidado que hay que tener es en los puntos en los que $E - V(q) = 0$. Si el cruce por cero en $q = q_0$ se produce de manera lineal (cosa que se puede notar a simple vista), es decir, si

$$E - V(q_0 + \delta q) \simeq \lambda \delta q, \quad (13)$$

al tomar la raíz en la región cercana a q_0 , del lado en que $\lambda \delta q$ sea positivo, será

$$\sqrt{E - V(q)} \simeq \sqrt{\lambda \delta q}, \quad (14)$$

lo que significa que la curva $\sqrt{E - V(q)}$ intersecta al eje q con pendiente infinita.



- Si, en cambio, la curva $E - V(q)$ toca al eje q en q_0 , pero no pasa del otro lado, es decir, si por ejemplo es

$$E - V(q_0 + \delta q) = \lambda \delta q^2, \quad (15)$$

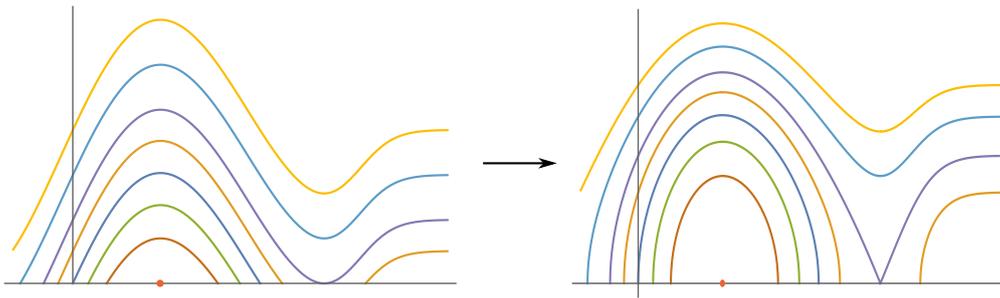
entonces al tomar la raíz cuadrada, en la región vecina a q_0 será

$$\sqrt{E - V(q)} \simeq \sqrt{\lambda} |\delta q|, \quad (16)$$

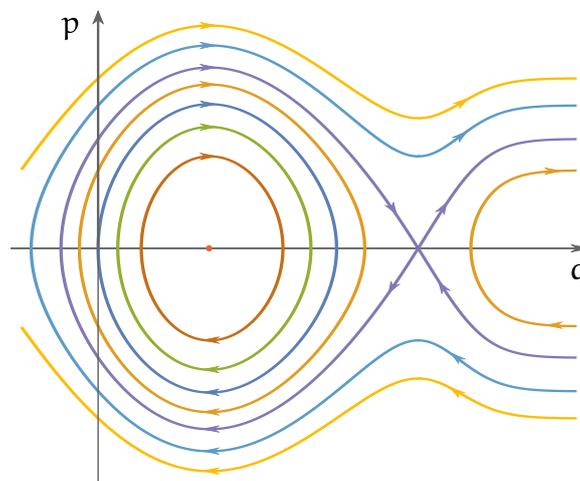
lo que significa que la función $\sqrt{E - V(q)}$ toca al eje q con pendiente finita.



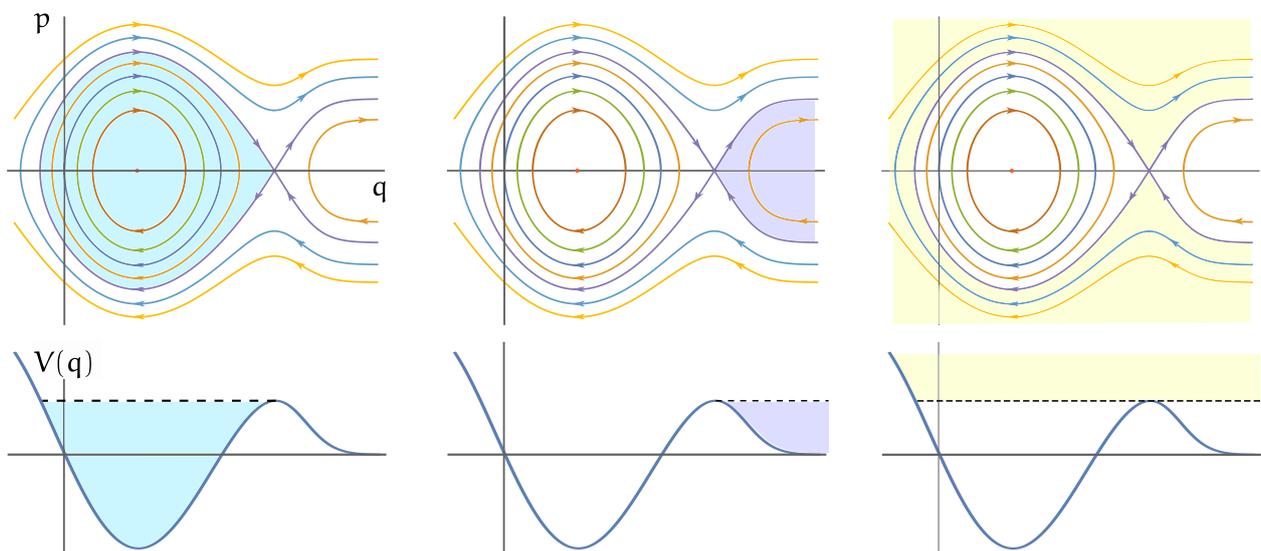
- Ahora copiamos la figura con las curvas de $E - V(q)$ y las retocamos en los puntos en las que intersectan al eje q , de acuerdo a las reglas que acabamos de dar.



- Resta completar la figura por simetría, cambiar un poco las escalas y distribuir flechitas a discreción.



No hay nada en el retrato de fase que no pueda ser leído directamente en el gráfico del potencial variando el nivel de energía E . La ventaja del retrato de fase es que está toda la información en un sólo gráfico. La siguiente figura muestra la correspondencia que hay entre los dos tipos de representación gráfica.



■ Respecto al cálculo del hamiltoniano en sí mismo. Dado el lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, el método sistemático para encontrar el hamiltoniano, pero no por eso siempre el más adecuado, consiste en:

- i) Derivar el lagrangiano respecto de cada \dot{q}_j para encontrar los impulsos en términos de \mathbf{q} y de $\dot{\mathbf{q}}$:

$$p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (17)$$

- ii) Construir la función $h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$,

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_j p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \dot{q}_j - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (18)$$

En este paso es práctico tener en cuenta que si el lagrangiano es de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0, \quad (19)$$

donde \mathcal{L}_i es homogénea de grado i en las velocidades, entonces (deberían demostrarlo)

$$h = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0. \quad (20)$$

Esto evita tener que calcular la expresión (18) explícitamente. En especial, si $\mathcal{L} = T - V$, con T homogénea de grado dos en las velocidades y V independiente de ellas,

$$h = T + V. \quad (21)$$

- iii) Ahora hay que eliminar las velocidades en términos de los impulsos. Es decir, resolver las ecuaciones (17) para escribir cada \dot{q}_j en función de \mathbf{q} y \mathbf{p} :

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (22)$$

- iv) Reemplazando en la expresión de h se encuentra finalmente el hamiltoniano:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t). \quad (23)$$

Debido a que los lagrangianos suelen tener una estructura que se repite, algunos pasos pueden hacerse automáticamente. Por ejemplo, si en un lagrangiano la velocidad generalizada \dot{q}_i aparece sólo en un término de la forma

$$\frac{1}{2}f(\mathbf{q})\dot{q}_i^2, \quad (24)$$

la función h contendrá el mismo término y, en el hamiltoniano, p_i aparecerá como $p_i^2/2f(\mathbf{q})$. Para demostrar esto, notemos que el impulso canónicamente conjugado de q_i es

$$p_i = f(\mathbf{q})\dot{q}_i. \quad (25)$$

Los términos en los que aparece \dot{q}_i en la función h son

$$p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} f(\mathbf{q}) \dot{q}_i^2. \quad (26)$$

Mediante la ec. (25), esta expresión se lee como

$$f(\mathbf{q}) \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} f(\mathbf{q}) \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} f(\mathbf{q}) \dot{q}_i^2, \quad (27)$$

que era parte de lo que queríamos demostrar. Entonces, en el hamiltoniano, el impulso p_i aparecerá en un término de la forma

$$\frac{p_i^2}{2f(\mathbf{q})}. \quad (28)$$

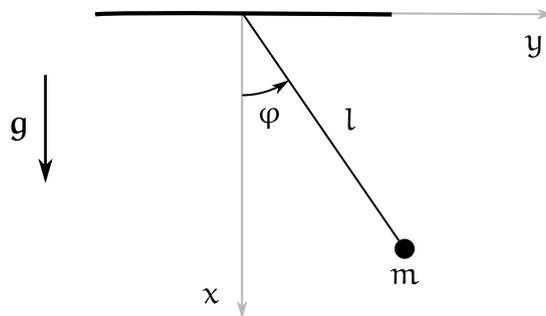
Así, todos los lagrangianos de la clase

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} f(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^2 - V(\mathbf{q}) \quad (29)$$

darán origen a hamiltonianos con la siguiente estructura

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2f(\mathbf{q})} + V(\mathbf{q}). \quad (30)$$

■ El problema 1 pide encontrar el hamiltoniano, escribir las ecuaciones de Hamilton y graficar los retratos de fase para varios sistemas. Empecemos por el péndulo plano.



Para escribir su hamiltoniano, partimos del lagrangiano, tomando como coordenada generalizada el ángulo φ ,

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m g l \cos \varphi. \quad (31)$$

Este lagrangiano pertenece a la clase representada por la ec. (29), por lo tanto resultará

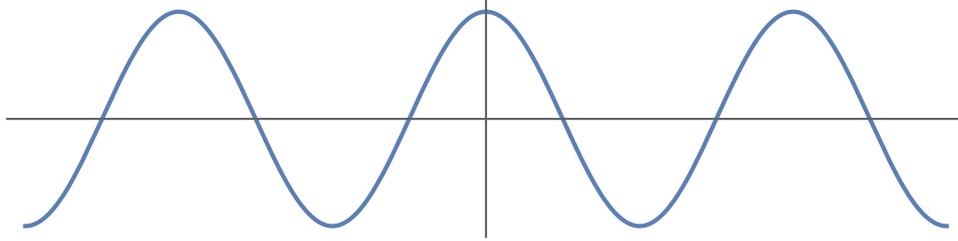
$$H(\varphi, p) = \frac{p^2}{2m l^2} - m g l \cos \varphi, \quad (32)$$

y ecuaciones de Hamilton serán entonces

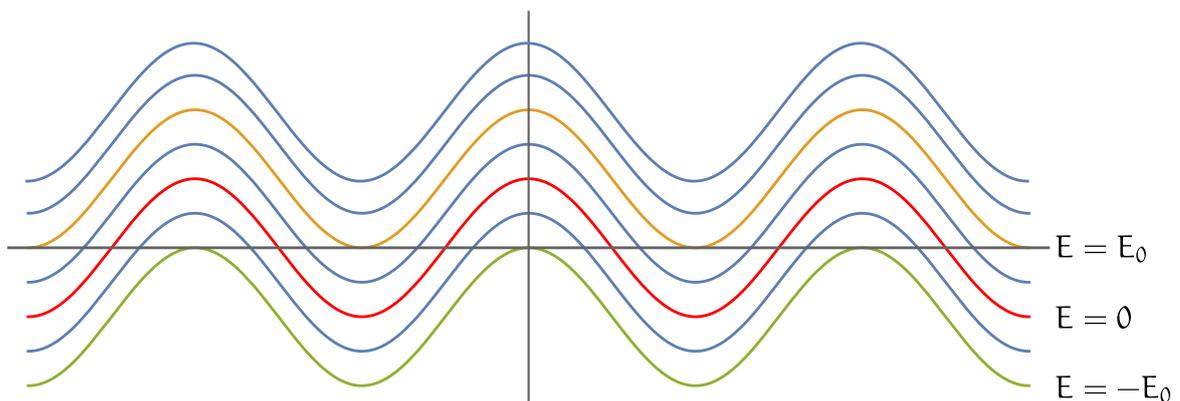
$$\dot{\varphi} = \frac{p}{m l^2}, \quad \dot{p} = -m g l \sin \varphi. \quad (33)$$

Notar que p tiene unidades de impulso angular.

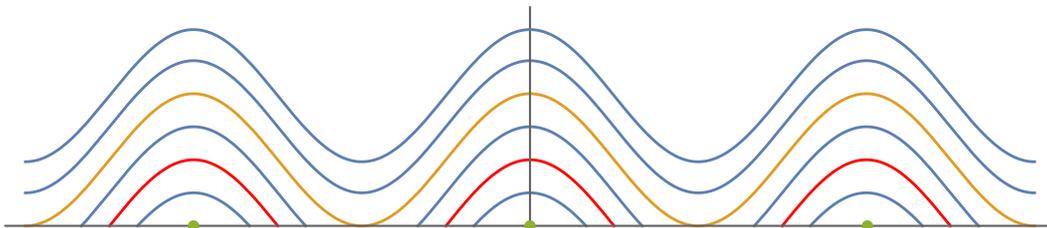
Si queremos graficar el retrato de fase, debemos tomar el potencial $V(\varphi) = -mgl \cos \varphi$ y seguir el procedimiento que explicamos anteriormente. Definamos $E_0 = mgl$. Empezamos graficando la función $-V(\varphi) = E_0 \cos \varphi$.



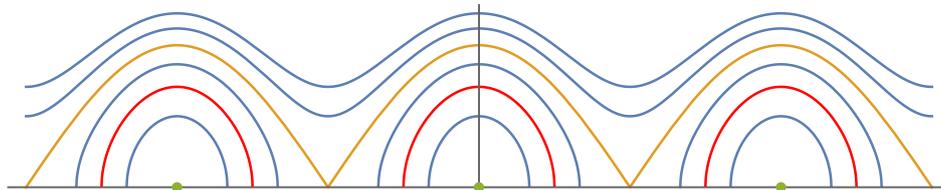
Luego graficamos varias veces la misma función sumándole distintos valores de E . Hay dos valores especiales, correspondientes a los mínimos y a los máximos del potencial. Estos valores son $\pm E_0$. Tenemos que asegurarnos de incluir esos dos valores de E , y elegir los otros según nos parezca mejor. No tiene sentido elegir valores de E menores que $-E_0$ puesto que esas curvas quedarán completamente por debajo del eje horizontal, y todavía falta tomarles la raíz cuadrada.



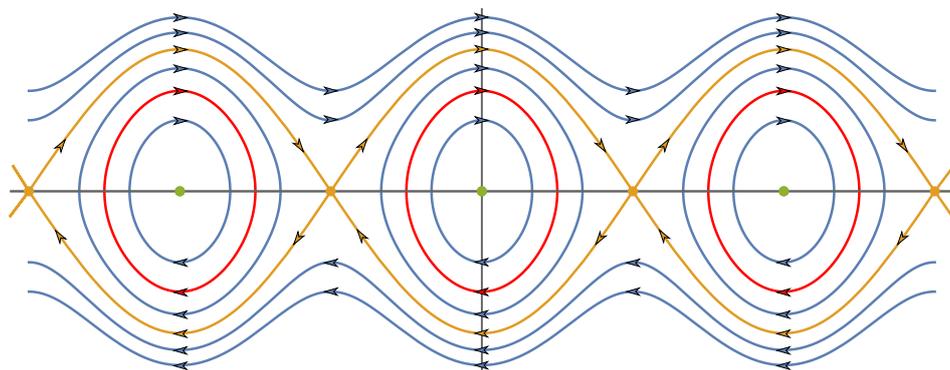
Hasta aquí hemos graficado $E - V(\varphi)$. Como vamos a tomar la raíz cuadrada, borramos del dibujo todos los tramos de las curvas que queden por debajo del eje horizontal.



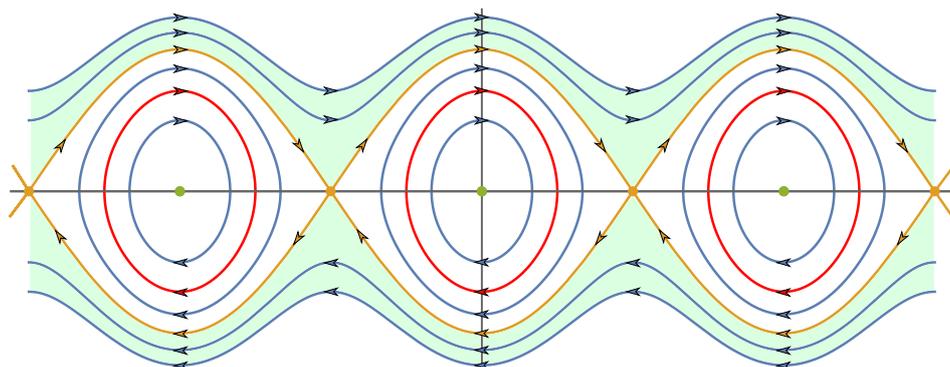
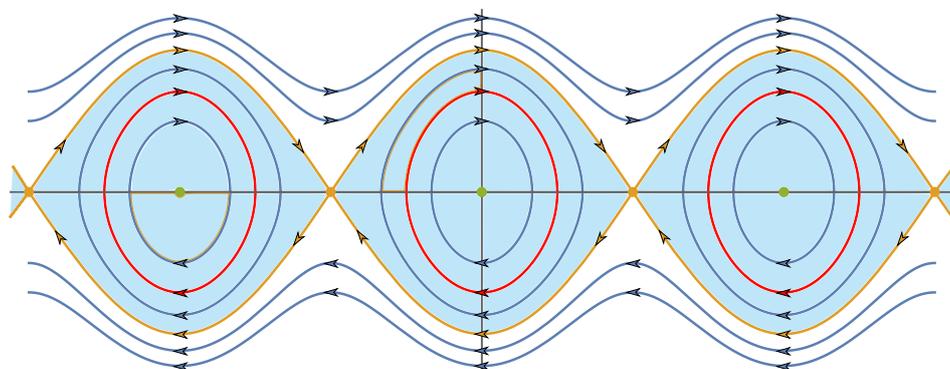
Ahora *tomamos* la raíz cuadrada, que consiste en repetir el dibujo anterior alterándolo de manera suave de tal modo que las intersecciones con el eje horizontal tracen o bien una raíz cuadrada o bien la función valor absoluto.



Finalmente, completamos el retrato por simetría y le agregamos flechitas aquí y allá.

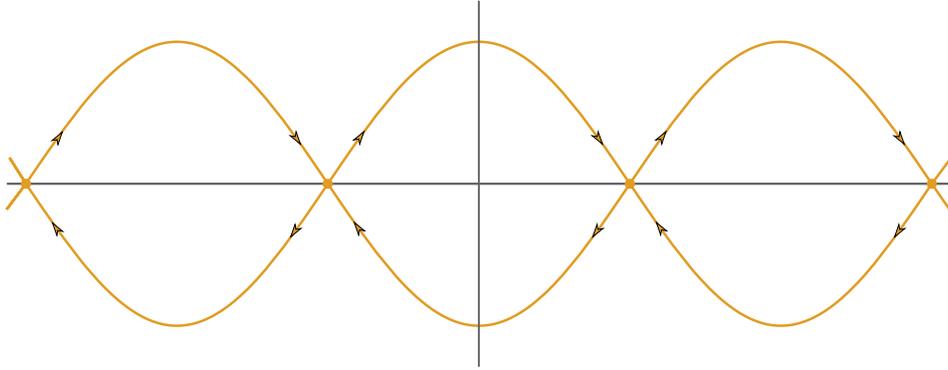


El retrato de fase se divide en regiones de libración (es decir, oscilación) y rotación. Entre las dos regiones hay una separatriz.



La separatriz corresponde a las curvas de nivel con energía igual a E_0 ,

$$p = \pm \sqrt{2ml^2} \sqrt{E_0 + E_0 \cos \varphi} = \pm 2\sqrt{ml^2 E_0} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (34)$$



En las figuras de la página anterior, los puntos de equilibrio estable, $\varphi_n^{(e)} = 2\pi n$, están marcados en verde. Corresponden a órbitas de libración de amplitud cero. Los puntos de equilibrio inestable, $\varphi_n^{(i)} = (2n + 1)\pi$, están en las intersecciones de las curvas anaranjadas. Estos puntos están ubicados en los máximos del potencial. Ustedes pueden verificar que toma un tiempo infinito alcanzar uno de estos puntos desde una posición intermedia. Por ejemplo, si desde la posición $\varphi = 0$, le dan al péndulo el impulso justo para que alcance el máximo del potencial en $\varphi = \pi$, le tomará un tiempo infinito alcanzar ese punto.

■ Pasemos al *item* (c). Se nos pide encontrar el hamiltoniano en coordenadas esféricas de una partícula que se mueve en un potencial central $V(r)$. Su lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - V(r). \quad (35)$$

Sabemos que H va a ser $T + V$. Además, cada término cinético es de la forma $\frac{1}{2}f_i(\mathbf{q})\dot{q}_i^2$, así que podemos usar el resultado que dedujimos más arriba. En definitiva,

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r). \quad (36)$$

Las coordenadas cíclicas siguen teniendo el mismo papel relevante que en el formalismo lagrangiano. Aquí φ es cíclica; eso significa que su momento conjugado p_φ se conserva. Las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{p}_r = \frac{1}{mr^3} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} \right) - V'(r), \\ \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2}{mr^2\sin^3\theta} \cos\theta, \\ \dot{p}_\varphi = 0. \end{cases} \quad (37)$$

■ En el *item* (d), una partícula se mueve en el plano sometida a un potencial central $V(r)$. El lagrangiano en coordenadas polares es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - V(r). \quad (38)$$

Por lo tanto, el hamiltoniano resulta

$$H(r, \phi, p_r, p_\phi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r). \quad (39)$$

Este es un caso especial del *item* anterior, con $\theta = \pi/2$. Las ecuaciones de Hamilton se construyen fácilmente:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \\ \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - V'(r), \\ \dot{p}_\phi = 0. \end{cases} \quad (40)$$

Debido a que ϕ es cíclica y a que p_ϕ es constante, el problema radial está gobernado por un hamiltoniano efectivo

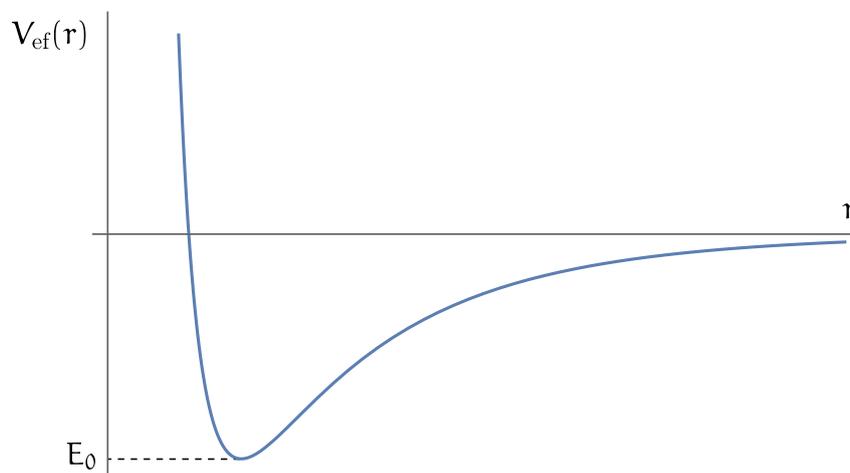
$$H_r(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r), \quad (41)$$

donde $l = p_\phi$ es el valor constante del impulso conjugado a la coordenada ϕ . Reconocerán en el hamiltoniano anterior el potencial efectivo para el problema de fuerzas centrales,

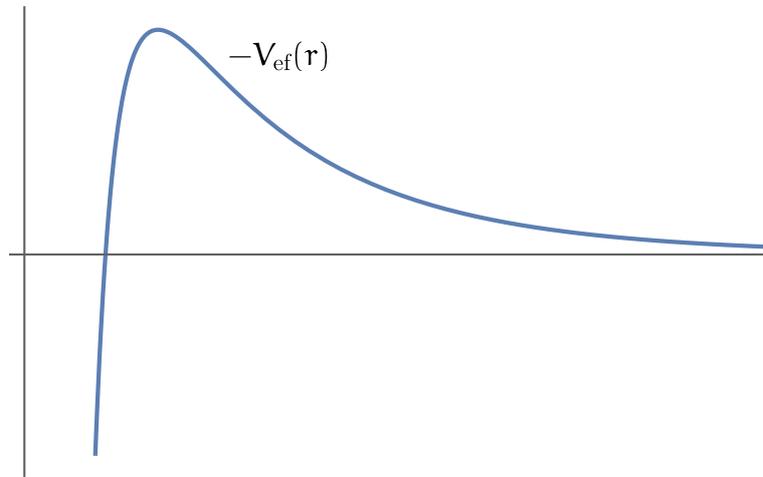
$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r). \quad (42)$$

Este potencial tendrá asociado un retrato de fase en el plano rp_r . El problema pide graficar el retrato de fase para los potenciales $V(r) = -k/r$ y $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Se hace la salvedad de que $k > 0$, pero es un buen ejercicio considerar además los casos en que $k < 0$. Aquí únicamente analizaremos el caso $V(r) = -k/r$ con $k > 0$, los otros tres casos quedan como ejercicio para ustedes.

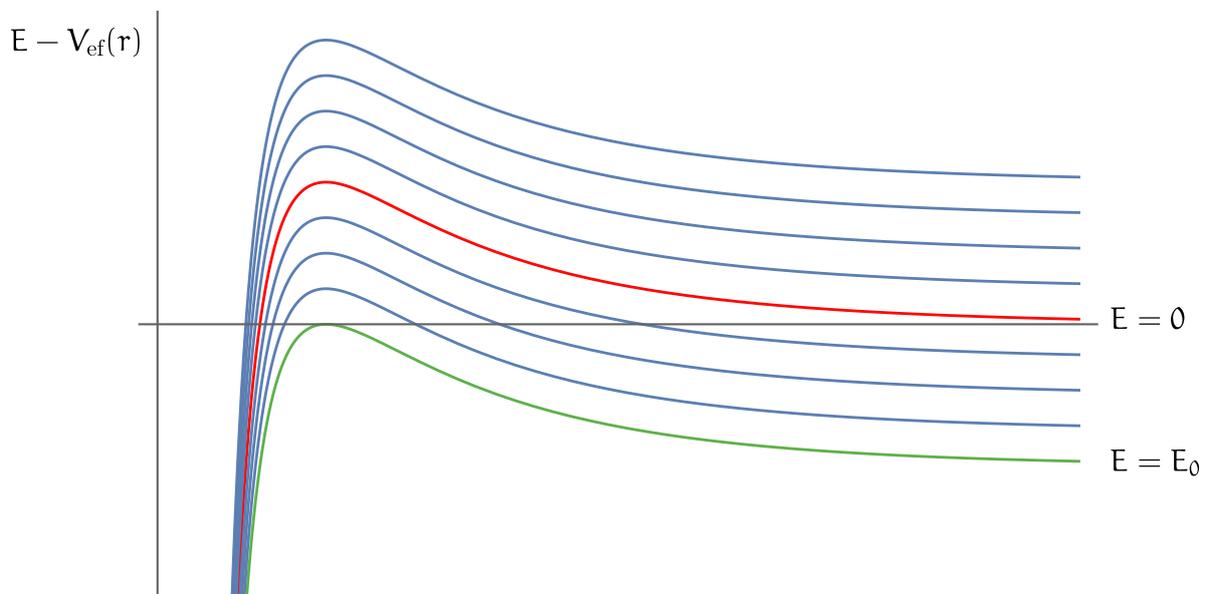
Primero graficamos el potencial V_{ef} . Es algo en lo que ya tenemos práctica.



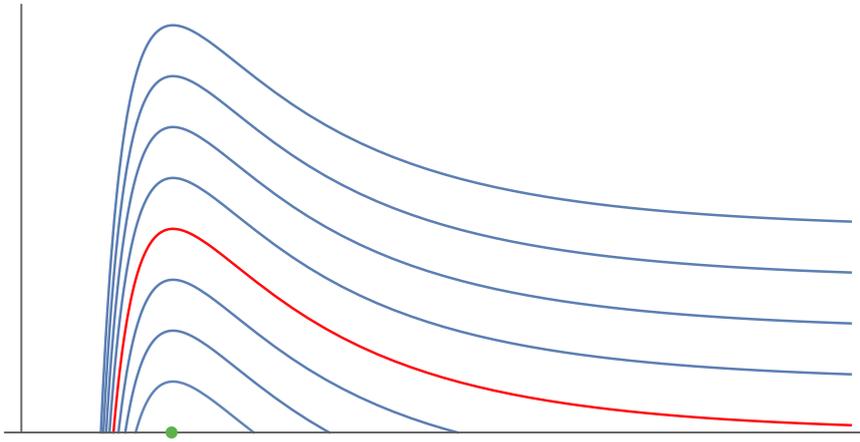
Ahora lo damos vuelta para graficar $-V_{\text{ef}}$.



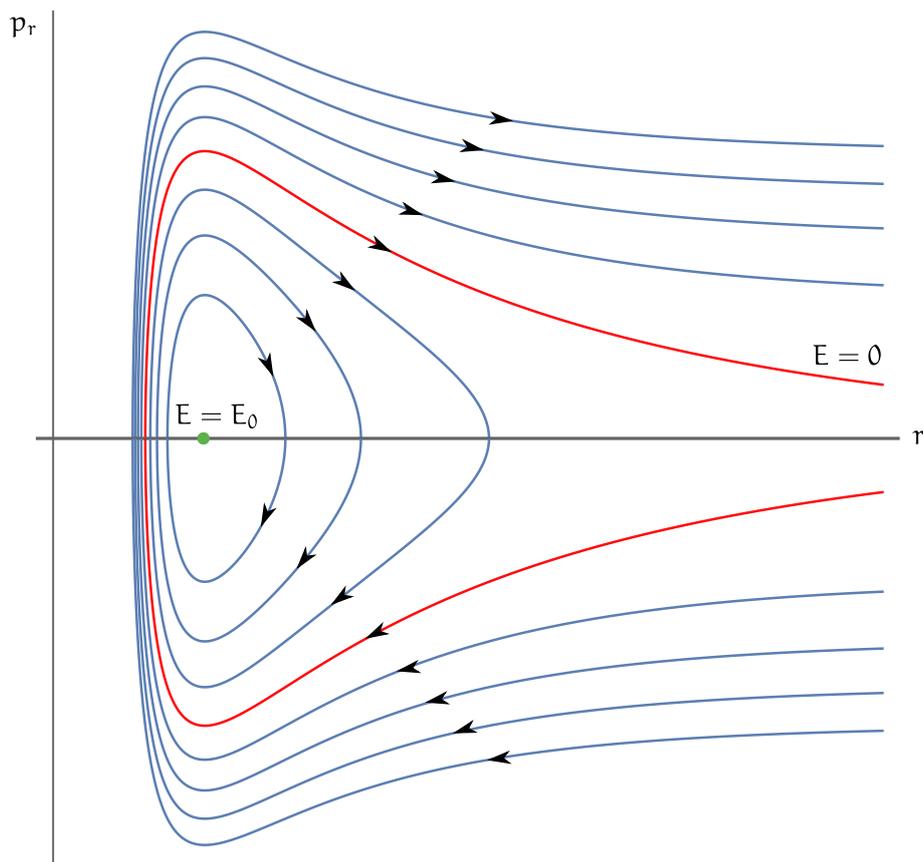
El paso siguiente es sumarle a esta función distintos valores de E . Hay dos valores especiales de la energía que debemos incluir necesariamente: el valor en el mínimo del potencial, E_0 , y el valor asintótico cuando $r \rightarrow \infty$. Distribuimos el resto de los valores como para tener varios casos intermedios. El resultado es la siguiente figura.



Como vamos a tomar raíz cuadrada, borramos todo lo que quede por debajo del eje horizontal.



Para obtener el retrato de fase definitivo, falta tomar raíz cuadrada a estas funciones, completar por simetría la región $p < 0$ y distribuir flechitas. Cualitativamente el único lugar en donde hay que retocar las curvas es en su intersección con el eje horizontal. Como aquí todas las intersecciones son lineales, al tomar raíz cuadrada intersectarán al eje horizontal con pendiente infinita.



Para energías en el intervalo $E_0 \leq E < 0$, las órbitas son periódicas y corresponden a un movimiento de libración en el espacio de fase rp_r . Para energías mayores o iguales que cero, las órbitas son no acotadas, y para cada valor de E el radio alcanza un valor mínimo. La órbita con $E = E_0$ consiste en un único punto de equilibrio estable. Este punto corresponde al movimiento en el espacio según una órbita circular.

■ El *item* (e) habla de un trompo simétrico pesado con un punto fijo. Este ejercicio es interesante porque los términos cinéticos en el lagrangiano ya no son de la forma $\frac{1}{2}f_i(\mathbf{q})\dot{q}_i^2$. El lagrangiano de un trompo simétrico pesado es

$$\mathcal{L} = \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + \frac{I}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgd \cos \theta, \quad (43)$$

donde I e I_3 son los momentos principales de inercia respecto al punto fijo y donde d es la distancia del punto fijo al centro de masa.

La función h será igual a $T + V$,

$$h = \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + \frac{I}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + mgd \cos \theta. \quad (44)$$

Se trata de construir el hamiltoniano H . Este ejemplo muestra que no siempre seguir la receta como un autómata es el camino más aconsejable. Si siguiéramos el procedimiento al pie de la letra, primero calcularíamos los impulsos conjugados:

$$p_\theta = I\dot{\theta}, \quad (45)$$

$$p_\phi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta + I\dot{\phi} \sin^2 \theta, \quad (46)$$

$$p_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta). \quad (47)$$

Ahora tendríamos que despejar las velocidades en términos de los impulsos, lo que es un poco engorroso, pero no tanto (sobre todo está el peligro de despejar $\dot{\phi}$ siguiendo un camino larguísimo):

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I}, \quad (48)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \sin^2 \theta}, \quad (49)$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I \sin^2 \theta} \cos \theta. \quad (50)$$

Y encima ahora hay que escribir (44) haciendo estas sustituciones, lo que es horriblemente engorroso. No es de extrañar que en un parcial no haya uno que llegue al hamiltoniano correcto. Eso ocurre por seguir el procedimiento como una maquinita.

Sucede que a menudo no hace falta despejar las velocidades. Por ejemplo, para escribir el primer término de la función h en la ec. (44), lo único que necesitamos es la combinación

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta, \quad (51)$$

que está dada por la ec. (47). De modo que

$$\frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 = \frac{p_\psi^2}{2I_3}. \quad (52)$$

En segundo lugar, la ec. (46) puede escribirse como

$$p_\varphi = p_\psi \cos \theta + I\dot{\varphi} \sin^2 \theta, \quad (53)$$

de modo que es un trámite sencillo ver que

$$\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{I \sin^2 \theta}, \quad (54)$$

que es todo lo que necesitamos para escribir el segundo término de la expresión (44). Finalmente, sin necesidad de despejar las velocidades ni de hacer los reemplazos en la función h , obtenemos de manera inmediata que

$$H(\theta, \varphi, \psi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi) = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta. \quad (55)$$

Les propongo que reproduzcan este resultado siguiendo paso a paso la receta para construir hamiltonianos, despejando las velocidades en términos de los impulsos y calculando

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (56)$$

Verán entonces lo importante que es pararse un minuto a meditar acerca de qué cosas realmente necesitan calcular.

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I \sin^2 \theta} \cos \theta, \\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I \sin^2 \theta}, \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I}, \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} \dot{p}_\psi = 0, \\ \dot{p}_\varphi = 0, \\ \dot{p}_\theta = -\frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I \sin \theta} p_\psi + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{I \sin^3 \theta} \cos \theta + mgd \sin \theta. \end{cases} \quad (58)$$

A través de las cantidades conservadas es posible construir un problema efectivo para la coordenada θ . Puesto que ψ y φ son coordenadas cíclicas, sus impulsos conjugados se conservan. De esta manera, la evolución en el espacio de fase θp_θ está controlada por el siguiente hamiltoniano

$$H_\theta(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta. \quad (59)$$

El potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta. \quad (60)$$

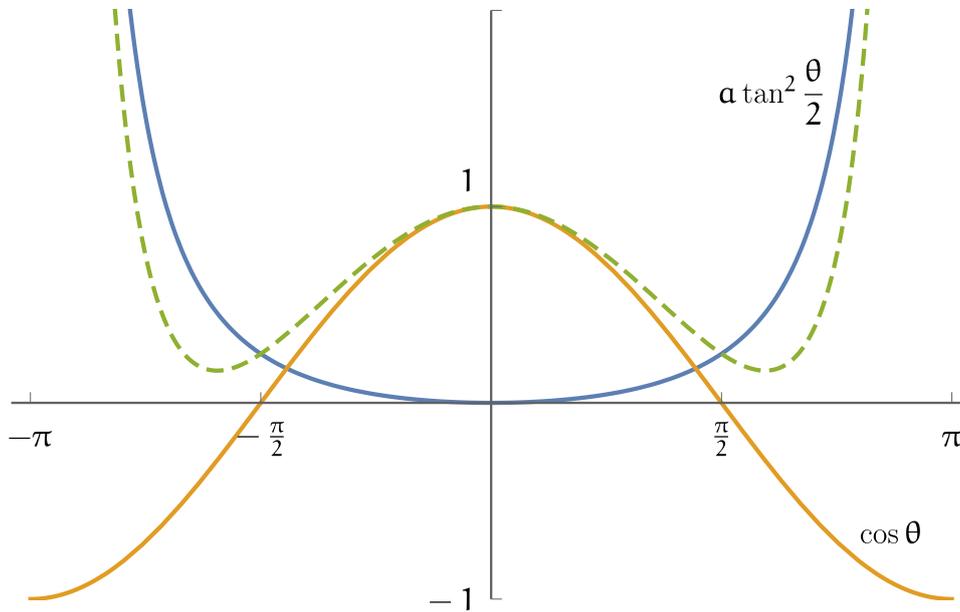
Un análisis exhaustivo del retrato de fase en el espacio θp_θ requiere contemplar un gran número de casos. Tomaremos uno en particular, sugerido en el enunciado del problema: $p_\phi = p_\psi$. El otro caso propuesto queda para ustedes como ejercicio. Con $p_\phi = p_\psi$ se obtiene

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{p_\phi^2 (1 - \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta = \frac{p_\phi^2}{2I} \tan^2 \frac{\theta}{2} + mgd \cos \theta. \quad (61)$$

A todos los efectos prácticos, el potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(\theta) = a \tan^2 \frac{\theta}{2} + \cos \theta, \quad (62)$$

con $a > 0$. Un análisis gráfico de la suma de estas dos funciones permite prever una forma posible para este potencial:



Para θ tendiendo a $\pm\pi$ el gráfico del potencial tiene que pegarse al gráfico de la función $a \tan^2 \frac{\theta}{2}$, puesto que ahí esa función diverge. En cambio, para $|\theta| \ll 1$, domina la función $\cos \theta$. A primera vista deberían existir dos mínimos, como los que muestra la figura anterior. Pero es posible que para a suficientemente grande esos mínimos desaparezcan. Eso debería ocurrir si la concavidad del potencial en $\theta = 0$ se vuelve positiva. Cerca de cero es

$$V_{\text{ef}}(\theta) \simeq \frac{a\theta^2}{4} + 1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - 1 \right) \theta^2. \quad (63)$$

Vemos que para $a < 2$, la concavidad en el origen es negativa, y cambia de signo cuando a sobrepasa el valor 2. Deberíamos esperar que en ese caso los dos mínimos laterales desaparecieran.

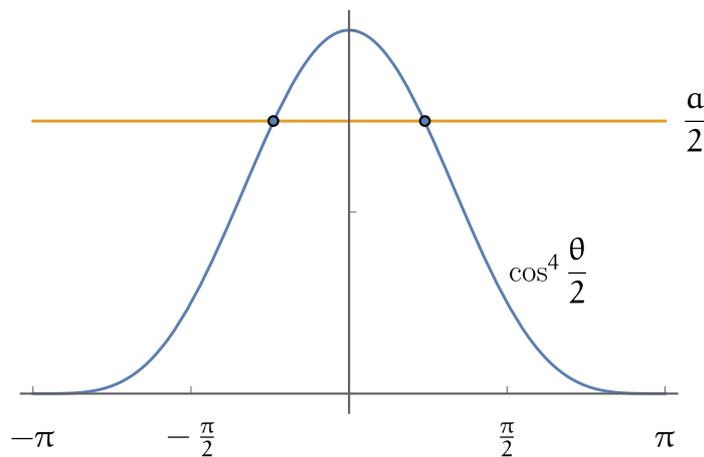
Este análisis se confirma si buscamos los puntos críticos del potencial. Su derivada es

$$V'_{\text{ef}}(\theta) = \frac{a \tan \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} - \sin \theta = \frac{a \sin \frac{\theta}{2}}{\cos^3 \frac{\theta}{2}} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (64)$$

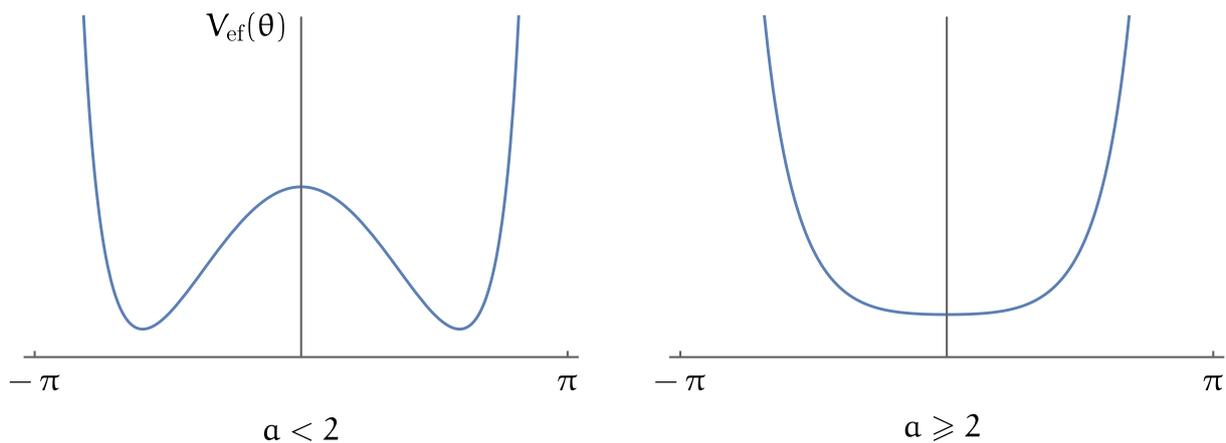
La derivada siempre se anula en $\theta = 0$, y si $a \leq 2$ también se anula cuando

$$\cos^4 \frac{\theta}{2} = \frac{a}{2}. \quad (65)$$

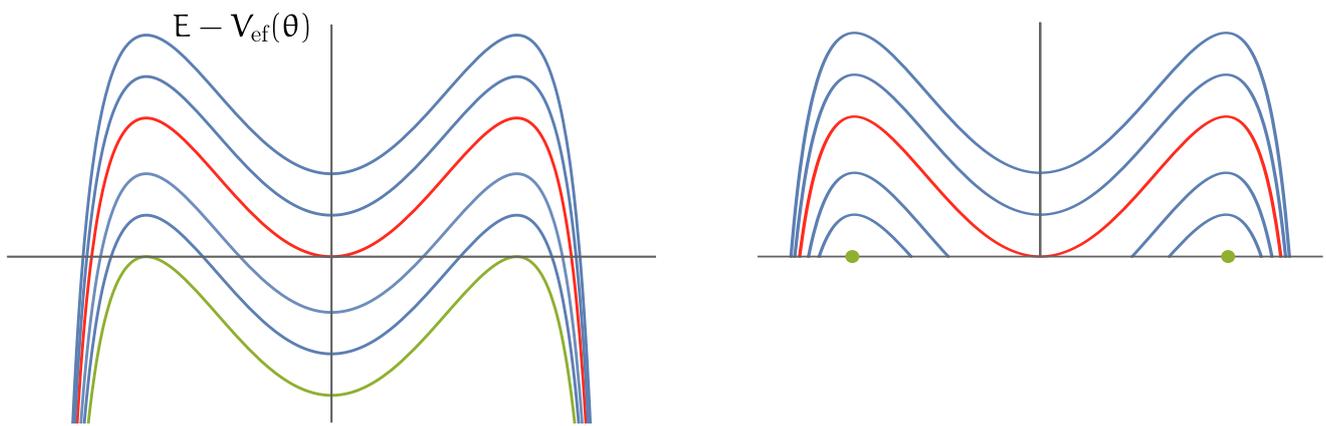
Si $a = 2$, esto corresponde nuevamente a $\theta = 0$. Si $a < 2$ hay dos raíces distintas, como muestra la figura.



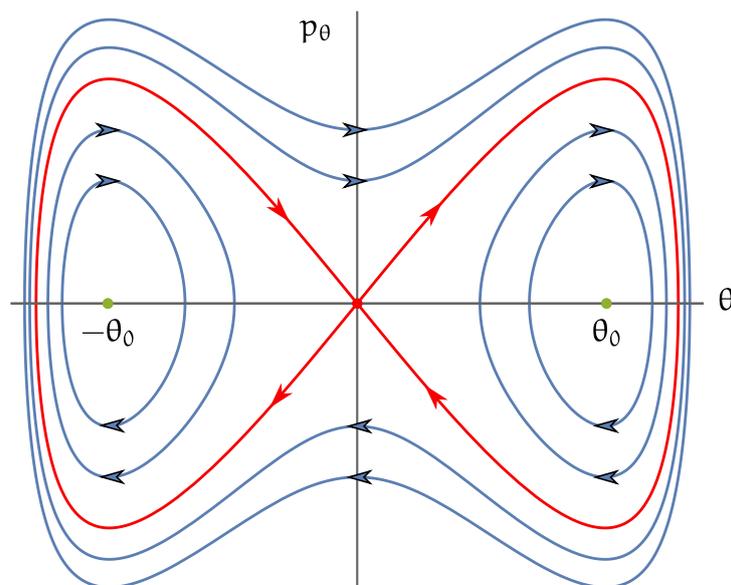
Esto quiere decir que el potencial no siempre tiene dos mínimos. Para graficar el retrato de fase habrá que considerar por separado dos casos esencialmente distintos: i) $a < 2$ y ii) $a \geq 2$. La figura muestra un gráfico del potencial efectivo representativo de cada caso.



Vamos a graficar el retrato de fase para el potencial de la izquierda. El otro quedará como ejercicio. Empezamos dibujando $E - V_{\text{ef}}(\theta)$ para varios valores de la energía. Dos valores de E que deben incluirse necesariamente son el de los mínimos y el del máximo. Después borramos los tramos de las curvas que están por debajo del eje horizontal.



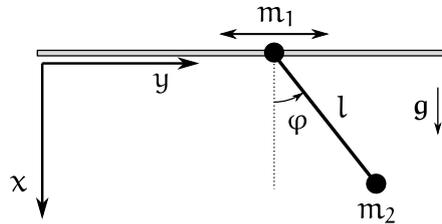
Por último, tomamos la raíz cuadrada. Cualitativamente los únicos cambios que hay que introducir ocurren en las intersecciones de las curvas con el eje horizontal. Cuando la intersección es lineal, al tomar raíz cuadrada deben graficarse con pendiente infinita. Cuando la intersección es cuadrática, cerca del punto de intersección resulta el gráfico del valor absoluto. Ese es el caso de la curva marcada en rojo. Completamos el retrato por simetría y suministramos flechitas generosamente.



Todos los movimientos permitidos son de libración, pero se dividen en dos clases: i) libración alrededor de los puntos $\pm\theta_0$, y ii) libración alrededor de ambos puntos. La curva roja es la separatriz entre los dos tipos de comportamiento. En verde están indicados los dos puntos de equilibrio estable. En el origen está el punto de equilibrio inestable correspondiente al máximo del potencial en $\theta = 0$.

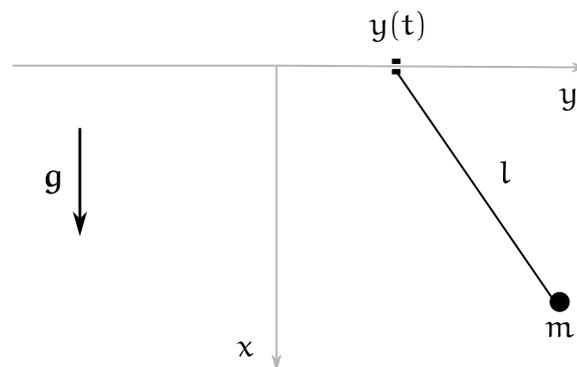
■ Problemas propuestos

- a) Encontrar el hamiltoniano del péndulo doble. Asumir $l_1 = l_2 = l$ y $m_1 = m_2 = m$.
- b) Encontrar el hamiltoniano del sistema del problema 17 de la Guía 1.



Dando distintos valores de p_y , graficar en la computadora el retrato de fase para el problema efectivo en la coordenada φ .

- c) Graficar el retrato de fase para una partícula que se mueve sobre el eje x unida al origen por un resorte de constante k y longitud natural l_0 . Prestar mucha atención, porque el potencial *no es* $\frac{1}{2}k(x - l_0)^2$.
- d) Encontrar el hamiltoniano de un péndulo plano cuyo punto de suspensión sigue una trayectoria predeterminada $y(t)$.



- e) Encontrar el hamiltoniano de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético caracterizado por potenciales ϕ y \mathbf{A} . Recordar que el potencial es

$$V = -\frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\phi. \tag{66}$$

En los dos primeros problemas no hay atajos. En los dos últimos, el cálculo puede abreviarse notablemente si se usa la propiedad enunciada en la ec. (20). El problema (b) es un ejemplo en donde el retrato de fase escapa al procedimiento que hemos aplicado anteriormente. No va a ser el único caso que veamos. Por ejemplo, en mecánica relativista aparecerán hamiltonianos de la forma

$$H(x, p) = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + V(x). \tag{67}$$

■ Nota de 2022: originalmente había escrito, en los problemas propuestos, que los dos primeros no tenían atajos, pero no es cierto. Patricio Clark introdujo en clase el siguiente truco, que sirve para simplificar los cálculos con hamiltonianos cuadráticos en las velocidades. Si

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (68)$$

entonces

$$p_i = a_{ij} \dot{q}_j. \quad (69)$$

De esta manera

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}_i p_i. \quad (70)$$

Así, cuando haya que reemplazar los \dot{q}_i en términos de los p_i en la energía cinética, no será necesario construir el producto de \dot{q}_i con \dot{q}_j . Simplemente habrá que calcular términos lineales en los \dot{q}_i . Ejemplo, el péndulo doble con masas iguales y longitudes iguales. El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos \Delta\varphi + 2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2. \quad (71)$$

Los momentos son

$$p_1 = 2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 \cos \Delta\varphi, \quad (72)$$

$$p_2 = \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1 \cos \Delta\varphi. \quad (73)$$

De aquí se despejan las velocidades,

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{p_1 - p_2 \cos \Delta\varphi}{1 + \sin^2 \Delta\varphi}, \quad (74)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{2p_2 - p_1 \cos \Delta\varphi}{1 + \sin^2 \Delta\varphi}. \quad (75)$$

En lugar de formar la cuadrática en las velocidades, calculamos la bilineal en las velocidades y los impulsos:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left(\frac{p_1 - p_2 \cos \Delta\varphi}{1 + \sin^2 \Delta\varphi} p_1 + \frac{2p_2 - p_1 \cos \Delta\varphi}{1 + \sin^2 \Delta\varphi} p_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \Delta\varphi}{1 + \sin^2 \Delta\varphi} \right). \end{aligned} \quad (76)$$