Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021

Clase práctica del jueves 17/6. *Guía 7. Ecuación de Hamilton–Jacobi.*[*]

1. Motivación

De acuerdo al problema 4, el problema del oscilador armónico puede llevarse a una forma más simple mediante una transformación canónica. La función generatriz de esta transformación es dato, $F_1(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$. Tan complicada o sencilla como pudiera parecer, deberían demostrar que también existe la F_2, dada por

$$F_2(q,P) = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\sqrt{P - \frac{m\omega}{2}q^2}\; q + P \arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\; q\right). \tag{1}$$

En verdad esto puede expresarse de modo mucho más compacto como

$$F_2(q,P) = \sqrt{2m}\int_0^q dq\,\sqrt{\omega P - \frac{m\omega^2}{2}q^2}\,, \tag{2}$$

y es más sencillo trabajar sobre esta expresión que sobre la ec. (1). Luego de leer estas notas deberían entender el origen de la ec. (2). Queda como ejercicio que verifiquen que esta transformación lleva del hamiltoniano

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \tag{3}$$

al nuevo hamiltoniano

$$K(Q,P) = \omega P. \tag{4}$$

Las ecuaciones de transformación a las que deberían llegar son

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\,\sin Q, \qquad p = \sqrt{2m\omega P}\,\cos Q. \tag{5}$$

[*]zanellaj@df.uba.ar

El nuevo hamiltoniano es trivial. Las ecuaciones de movimiento para Q y P son

$$\dot{Q} = \omega, \qquad \dot{P} = 0. \tag{6}$$

De aquí obtenemos

$$Q(t) = \omega(t - t_0), \qquad P(t) = P. \tag{7}$$

Si reemplazamos estas funciones de t en las ecuaciones de transformación (5), obtenemos la solución del problema en las variables originales,

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin \omega(t - t_0), \qquad p(t) = \sqrt{2m\omega P} \cos \omega(t - t_0). \tag{8}$$

La ecuación diferencial más complicada que tuvimos que resolver fue $\dot{Q} = \omega$. Es cierto que esto no representa una gran simplificación respecto de las variables originales, en donde la ecuación es $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$. Pero sirve para resaltar un hecho: mediante una transformación canónica adecuada el problema de resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento puede volverse trivial; todo el peso del cálculo recae en invertir y componer funciones. Uno creería que suele ser preferible tener un sistema trivial de ecuaciones diferenciales y ciertas ecuaciones de transformación, que tener un sistema complicado de ecuaciones diferenciales y ninguna ecuación de transformación.

Lo que hicimos para el oscilador armónico tal vez lo podamos llevar a cabo con cualquier sistema. ¿No será más sencillo encontrar una transformación canónica que trivialice la dinámica, aunque luego tengamos que invertir y componer funciones, que resolver la dinámica en las variables originales? Como casi todo en la vida, la respuesta es que no siempre. Pero de todos modos, sería deseable que la búsqueda de la transformación adecuada no siga el procedimiento de prueba y error, sino que sea a través de un método sistemático.

Hay muchos hamiltonianos cuya dinámica podemos calificar de trivial; por ejemplo, algo de la forma (4), $K(Q, P) = \omega P$. Sería un noble objetivo tratar de encontrar la transformación canónica que lleve de un hamiltoniano cualquiera $H(q, p)$ a uno de la forma $K(Q, P) = \omega P$. Pero sería un objetivo modesto. Puestos a resolver el problema de encontrar una transformación canónica que trivialice el hamiltoniano, nos fijaremos como objetivo que el hamiltoniano transformado sea el más trivial de los hamiltonianos. Nos propondremos que el nuevo hamiltoniano sea $K = 0$.

2. El hamiltoniano nulo

La idea del método de H–J es encontrar una transformación canónica que lleve del hamiltoniano original $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ al hamiltoniano nulo

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = 0. \tag{9}$$

Esta transformación dará relaciones entre las coordenadas originales y las nuevas,

$$q_i = q_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \qquad p_i = p_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t). \tag{10}$$

Si se tratase de una transformación canónica cualquiera, las soluciones de las ecuaciones de movimiento originales serían

$$q_i(t) = q_i\big(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t), t\big), \qquad p_i(t) = p_i\big(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t), t\big), \tag{11}$$

donde $\mathbf{Q}(t)$ y $\mathbf{P}(t)$ son las soluciones de las ecuaciones de movimiento correspondientes al nuevo hamiltoniano. Pero no se trata de una transformación cualquiera. El nuevo hamiltoniano es el hamiltoniano nulo, lo que implica que la dinámica de las nuevas coordenadas es trivial. Tanto $\mathbf{Q}$ como $\mathbf{P}$ son constantes. Así, la solución de las ecuaciones de movimiento para las coordenadas originales se lee directamente de las ecuaciones de transformación,

$$q_i(t) = q_i\big(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t\big), \qquad p_i(t) = p_i\big(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t\big). \tag{12}$$

De esta manera el peso del problema se ha desplazado de encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \tag{13}$$

a simplemente aplicar las ecuaciones de transformación (12). Pasamos de un problema de $2n$ ecuaciones diferenciales a un problema meramente algebraico. La cuestión, claro está, no es tan sencilla, pues tenemos un nuevo problema: ¿cómo encontrar una transformación canónica que lleve de un hamiltoniano H cualquiera al hamiltoniano nulo?

Por simplicidad trabajaremos con sólo un par de variables canónicas. Dada una transformación canónica definida por la función generatriz $F_2(q, P, t)$, la relación entre el hamiltoniano original H y el nuevo hamiltoniano K está dada por

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + H = K. \tag{14}$$

A propósito no estamos mostrando aquí las variables de las que depende cada función, porque son todas distintas. Además de depender del tiempo, la función generatriz depende de q y de P, el hamiltoniano H, de q y de p, y el nuevo hamiltoniano K, de Q y de P.

Para dejar escrito todo en términos de las mismas variables, lo más cómodo es elegir q y P, que son las variables naturales de F_2. Teniendo en cuenta que

$$p(q, P, t) = \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t), \tag{15}$$

la ec. (14) se lee como

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(q, P, t) + H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t), t\right) = K(q, P, t). \tag{16}$$

Como nuestro objetivo es que K sea igual a cero, poco importa que en la ecuación anterior K no haya quedado escrito como función de sus variables naturales Q y P. La función generatriz satisfará la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(q, P, t) + H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t), t\right) = 0. \tag{17}$$

3. La ecuación de Hamilton–Jacobi

Hagan de cuenta que no leyeron nada de lo anterior. Escriban la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial t}(q, t), t\right) = 0. \tag{18}$$

Esta es la ecuación de H–J para la función principal de Hamilton S. Noten que es una ecuación en las variables t y q. No aparece ninguna variable más. Supongan ahora que son capaces de encontrar una solución de la ecuación anterior, pero no una solución cualquiera, sino una solución que dependa de una constante de integración α. Lo que haremos será escribir esa dependencia explícitamente. Nuestra solución será una función

$$S = S(q, \alpha, t). \tag{19}$$

Al resolver ecuaciones diferenciales, las constantes de integración aparecen naturalmente. Esto no es ninguna novedad. La novedad es reconocer su existencia incluyendo estas constantes en la definición de la solución de la ecuación diferencial.

Entonces, ¿qué es lo que tenemos hasta aquí? Tenemos, en principio, una función de dos variables, q y t, que satisface la ecuación de H–J y que, además, tiene lugar para alojar una variable adicional α. Usando el lugar que ocupa la variable adicional, definan

$$F_2(q, P, t) = S(q, P, t). \tag{20}$$

Pero, por el hecho de que S satisface la ecuación de H–J, vemos que el nuevo hamiltoniano asociado a F_2 es, justamente, el hamiltoniano nulo:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(q, P, t) + H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t), t\right) = 0. \tag{21}$$

Recapitulando: la ec. (18) es la ecuación de H–J. La solución S recibe el nombre de **función principal de Hamilton**. No necesitamos encontrar la solución general de esta ecuación. Sólo necesitamos una solución que dependa de un parámetro α. La dependencia en un parámetro es necesaria para poder definir a S como función de tres variables. Necesitamos que haya un espacio libre en el cual ubicar la variable P de la función generatriz. Así, el lugar ocupado por α perfectamente puede ser ocupado por P. Lo único esencial es que S tenga un lugar disponible para una variable adicional además de q y de t. Con variado énfasis, repetiré esto mismo unas tres o cuatro veces más.

La dependencia paramétrica en ciertas constantes de integración no debe resultarles extraña. Ocurre de manera habitual en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, si tenemos

$$f'(x) = f(x), \tag{22}$$

escribimos la solución como

$$f(x) = Ce^x, \tag{23}$$

o, más propiamente, como

$$f(x, C) = Ce^x. \tag{24}$$

La solución anterior depende de un parámetro, al que habitualmente nos referimos como "constante de integración". Otro ejemplo: cuando en Física 1 resuelven el problema del movimiento uniformemente acelerado,

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = a, \tag{25}$$

escriben la solución en la forma

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2. \tag{26}$$

De nuevo, x_0 y v_0 son parámetros que caracterizan a las soluciones. Para indicar ese hecho, más correcto sería escribir

$$x(t, x_0, v_0) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2. \tag{27}$$

Noten que ni x_0 ni v_0 aparecen en la ecuación diferencial (25). Deben ser incorporadas como variables dentro de la función x luego de resolver la ecuación diferencial. Es una manera de reconocer que la solución de la ecuación diferencial es una familia de funciones que dependen de tres variables.

Una relación análoga hay entre la ecuación diferencial (18),

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial t}(q, t), t\right) = 0, \tag{28}$$

en donde sólo aparecen las variables respecto de las cuales se deriva, y la eventual solución $S(q, \alpha, t)$, que incorpora la constante de integración a modo de nueva variable.

Si la solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales (28) depende de un parámetro, entonces esa dependencia debe ser expresada de manera explícita:

$$S = S(q, \alpha, t). \tag{29}$$

Desde este punto de vista, la dependencia paramétrica en α se trata como la dependencia en una variable propiamente dicha. Llamar variables a unas cantidades y parámetros a otras es convencional. En última instancia, todas tienen el mismo estatus.

3.1. La constante aditiva

Hay que hacer aquí un breve comentario. Debido a que en la ec. (28) sólo aparecen las derivadas de S y no la propia función S, dada una solución particular S_0 siempre podemos construir una familia de soluciones dependiente de un parámetro α,

$$S(q, \alpha, t) = S_0(q, t) + \alpha. \tag{30}$$

Pero esta dependencia en la variable α no sirve para definir una función generatriz F_2 como

$$F_2(q, P, t) = S_0(q, t) + P, \tag{31}$$

ni siquiera por intermedio de una función arbitraria de P,

$$F_2(q, P, t) = S_0(q, t) + f(P). \tag{32}$$

Ocurre que este tipo de función generatriz no define una transformación uno a uno invertible. Las ecuaciones de transformación serían

$$p = \frac{\partial S_0}{\partial q}(q, t), \qquad Q = f'(P). \tag{33}$$

Evidentemente no hay aquí ninguna ecuación de transformación propiamente dicha entre las coordenadas originales y las nuevas. Debido a esto, al escribir la solución de la ecuación de H–J, el lugar que ocupa la constante aditiva no puede ser aprovechado para ubicar uno de los nuevos impulsos.

Tenemos que formular en mejores términos el objetivo que se plantea al resolver la ecuación de H–J: para sistemas con un solo grado de libertad, se trata de encontrar una solución de la ec. (28) que dependa de una constante, sin contar la constante aditiva.

4. Sistemas con más de un grado de libertad

Todo lo anterior se generaliza para sistemas con n grados de libertad. En particular, la ecuación de H–J se lee como

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \ldots, q_n, t) + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}(q_1, \ldots, q_n, t), \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}(q_1, \ldots, q_n, t), t\right) = 0, \tag{34}$$

o, más concisamente,

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, t) + H(\mathbf{q}, \nabla S(\mathbf{q}, t), t) = 0. \tag{35}$$

Ahora lo fundamental es que, al resolver la ecuación de H–J, la solución dependa de tantas constantes de integración (sin contar la constante aditiva) como grados de libertad tenga el sistema. Este es el punto a remarcar: necesitamos una función que tenga el número suficiente de lugares libres entre sus variables como para acomodar a los n nuevos impulsos P_i.

No queremos la solución general, nos alcanza con una función S que satisfaga la ecuación anterior y que dependa de n constantes de integración α_1, α_2, ..., α_n, ninguna de ellas aditiva,

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t). \tag{36}$$

Igual que para el caso con un grado de libertad, lo más sencillo es destinar los lugares de las constantes de integración directamente a los nuevos impulsos, definiendo

$$F_2(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n, t) = S(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n, t). \tag{37}$$

Esta función generatriz nos llevará del hamiltoniano original al hamiltoniano nulo.

Por experiencia, sé que lo que suele resultar más chocante del método de H–J es este aparente surgir de la nada de los nuevos impulsos. Vuelvo a insistir con el punto esencial del método de H–J. El objetivo es encontrar una función S que satisfaga la ecuación de H–J y que sea lo suficientemente general como para depender de n constantes de integración (sin contar una constante aditiva). Contrariamente a la práctica usual, esa dependencia es incorporada explícitamente dentro de la definición de la función S. Obtenemos así un objeto que depende del mismo número de variables que una eventual función generatriz F_2. Nada impide entonces que definamos nuestra F_2 como en la ec. (37). Lo esencial no son los nombres de las variables. Lo esencial es encontrar una función que tenga el número suficiente de lugares para poner a las antiguas coordenadas, a los nuevos impulsos y al tiempo. Subrayen esto: el objetivo es obtener una función con el número suficiente de variables y que, respecto de las n primeras y de la última, satisfaga la ecuación diferencial (34). Para que quede claro: no menos fundamental que el hecho de que S satisfaga la ecuación de H–J, es que la solución dependa del número suficiente de constantes (no aditivas), que, consideraras como variables de la función S, puedan alojar a los nuevos impulsos.

5. Sistemas conservativos

Consideremos primero un sistema de un grado de libertad. Si el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, la ecuación de H–J es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \tag{38}$$

Se aplica aquí un método de solución que se llama **separación de variables**. Se busca la solución en la forma

$$S(q, t) = T(t) + W(q). \tag{39}$$

Reemplazando en la ec. (38) queda

$$T'(t) + H\Big(q, W'(q)\Big) = 0. \tag{40}$$

Tenemos una función de t sumada a una función de q y el resultado es igual a cero. Esto sólo puede ser cierto si

$$H\Big(q, W'(q)\Big) = \alpha, \tag{41}$$

$$T'(t) = -\alpha. \tag{42}$$

Omitiendo una constante aditiva, la segunda ecuación implica

$$T(t) = -\alpha t. \tag{43}$$

La ec. (41) es una ecuación diferencial ordinaria para W. Notar que la solución va a depender explícitamente de α. Será

$$W = W(q, \alpha). \tag{44}$$

Incorporando en S explícitamente la dependencia en la constante de separación α, tenemos

$$S(q, \alpha, t) = -\alpha t + W(q, \alpha). \tag{45}$$

En definitiva, haciendo la elección más directa para los nuevos impulsos, resulta

$$F_2(q, P, t) = -Pt + W(q, P). \tag{46}$$

Señalemos que, para esta elección, el nuevo impulso tiene un significado especial, como puede verse en la ec. (41) o a través de la ec. (46): sabemos que $K = H + \partial F_2/\partial t$, pero $K = 0$, entonces $H = -\partial F_2/\partial t$. Es decir,

$$H = P. \tag{47}$$

El nuevo impulso es constante y esa constante es igual a la energía o, más precisamente, a la función h. Cuando este es el caso, para resaltar la correspondencia, en lugar de P suele usarse la letra E.

Cuando el sistema tiene más de un grado de libertad, la solución se busca de la forma

$$S(q_1, \ldots, q_n, t) = -\alpha_1 t + W(q_1, \ldots, q_n). \tag{48}$$

La ec. (41) se leerá como

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1. \tag{49}$$

La solución para W deberá buscarse de manera tal que dependa de otras $n-1$ constantes de integración, sin contar la constante aditiva. Así,

$$S = S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t) = -\alpha_1 t + W(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \tag{50}$$

Lo más directo es definir la transformación F_2 identificando las constantes α_i con los P_i, reservando para P_1 el símbolo E,

$$F_2(q_1, \ldots, q_n, E, P_2, \ldots, P_n, t) = -Et + W(q_1, \ldots, q_n, E, P_2, \ldots, P_n). \tag{51}$$

La función W recibe el nombre de **función característica de Hamilton** y, como veremos en las próximas clases, tiene importancia por sí misma, al margen de su relación con S.

5.1. Una clase de sistemas conservativos

Todo problema unidimensional que se origine en un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \tag{52}$$

tiene por hamiltoniano

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{53}$$

La ecuación de H–J para la función principal de Hamilton es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0. \tag{54}$$

El sistema es conservativo, de modo que buscamos una solución de la forma

$$S = -Et + W(x). \tag{55}$$

Aquí ya hemos identificado la constante de separación con la energía. Ahora el problema es encontrar $W(x)$. Reemplazando en la ec. (54), la ecuación diferencial que satisface W es

$$H\Big(x, W'(x)\Big) = E. \tag{56}$$

Explícitamente,

$$\frac{W'(x)^2}{2m} + V(x) = E. \tag{57}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones para W',

$$W'(x) = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E - V(x)}. \tag{58}$$

La integración es inmediata,

$$W(x, E) = \pm\sqrt{2m}\int_{x_0}^{x} dx\,\sqrt{E - V(x)}. \tag{59}$$

Notar que hemos incorporado en la definición de W la dependencia explícita con E.

Cuando el término cinético es $p^2/2m$, desde la ec. (58) en adelante siempre aparecerá la alternativa entre los signos $+$ y $-$. Esta duplicidad indica que en realidad estamos obteniendo dos soluciones para W, y cada una de estas soluciones tendrá asociada una función generatriz F_2. Puesto que $W' = p$, la ec. (58), que es en donde se origina la disyuntiva entre los dos signos, permite ver que el signo positivo corresponde a regiones del movimiento en donde p es mayor o igual que cero, mientras que el signo negativo corresponde a regiones en donde p es menor o igual que cero. En otras palabras, la función generatriz F_2 construida tomando el signo positivo servirá para calcular la trayectoria de la partícula en aquellos tramos en los que su impulso sea mayor o igual que cero. Y análogamente para la función F_2 construida tomando el signo negativo.

Para no arrastrar el doble signo durante todo el cálculo, resulta más sencillo resolver para una sola de las ramas y usar propiedades conocidas del movimiento para extender la solución a todo tiempo. En lo que sigue trabajaremos con la solución que corresponde al signo positivo. Cuando veamos un ejemplo concreto mostraremos cómo extender la solución sin necesidad de repetir todo el cálculo para la otra elección del signo, aunque a veces no quedará más remedio que hacer eso.

Cuando el movimiento tiene al menos un punto de retorno, resulta conveniente elegir x_0 en la ec. (59) como uno de esos puntos. En un punto de retorno $p = 0$ y, por lo tanto,

$$E - V(x) = 0. \tag{60}$$

Al resolver esta ecuación sus raíces serán funciones de E. Nos interesa que haya al menos una raíz. La denotaremos x_E. Distintas elecciones podrán corresponder a distintas regiones posibles de movimiento. De modo que es importante tener a la vista el potencial $V(x)$ para saber en dónde es válida la solución.

Entonces, quedándonos de ahora en más con la solución que lleva el signo positivo en la ec. (59) y usando x_E como extremo inferior de integración, queda

$$W(x, E) = \sqrt{2m}\int_{x_E}^{x} dx\,\sqrt{E - V(x)}\,. \tag{61}$$

Una nota práctica de la mayor importancia: no se apuren a hacer esta integral. Las ecuaciones de transformación involucran a las derivadas de W. Con frecuencia es mucho más sencillo derivar primero e integrar después. Por eso el enunciado de varios problemas pide encontrar una expresión integral para S. Sé que siempre los estimulamos para que hagan las integrales sin consultar tablas ni depender de la computadora. Pero repito: no resuelvan la integral de la ec. (61) por el simple hecho de que haya un símbolo de integración.

Construida la función principal de Hamilton

$$S(x, E, t) = -Et + W(x, E), \tag{62}$$

hacemos la identificación más directa entre la constante de separación E y el lugar correspondiente al nuevo impulso en la función generatriz:

$$F_2(x, E, t) = S(x, E, t). \tag{63}$$

La evolución de x está determinada por la ecuación de transformación para la nueva coordenada,

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial E}(x, E, t) = -t + \frac{\partial W}{\partial E}(x, E). \tag{64}$$

Al derivar W respecto de E, hay que tener en cuenta todas las dependencias en la ec. (61) con respecto a la variable E,

$$\frac{\partial W}{\partial E}(x, E) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_E}^{x} dx\, \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} - \sqrt{2m}\sqrt{E - V(x_E)}\, \frac{dx_E}{dE}. \tag{65}$$

La ventaja de haber elegido el extremo inferior de la integral como un punto de retorno es que el último término es nulo por definición,

$$\sqrt{E - V(x_E)} = 0. \tag{66}$$

Entonces, volviendo a la ec. (64),

$$t + Q = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_E}^{x} dx\, \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{67}$$

Recién aquí nos preocupamos por hacer la integral. El objetivo es resolver la integral para obtener una relación de la forma

$$t + Q = \mathcal{F}(x, E), \tag{68}$$

para luego invertirla y conseguir x en función de t,

$$x(t, E, Q) = \mathcal{F}^{-1}\big(t + Q, E\big). \tag{69}$$

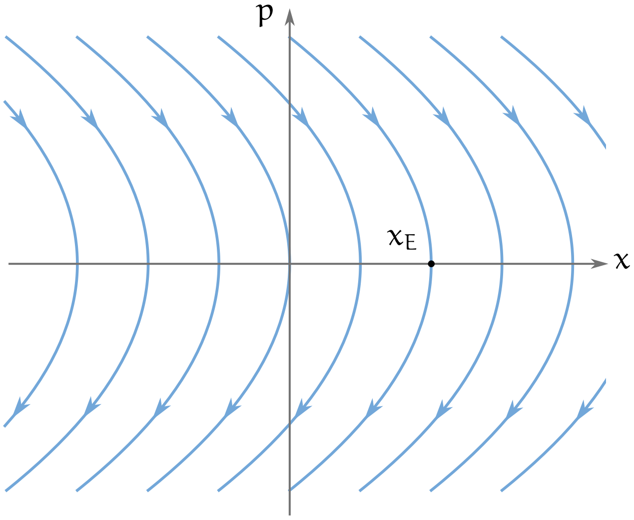
Con esto, el movimiento del sistema en la coordenada original x quedará completamente resuelto. La solución dependerá de dos constantes, Q y E, que es también el número de condiciones iniciales que es necesario especificar.

Si el movimiento es tal que no existen puntos de retorno, no hay un criterio universal que indique cuál debe ser el extremo inferior de integración en la expresión integral para W. Si hay un punto común a todas las trayectorias, tal vez resulte conveniente elegir ese punto en particular.

5.2. Un ejemplo

Tomemos por ejemplo el caso de una partícula que se mueve sobre el eje x en un potencial $V(x) = mgx$. El retrato de fase está formado por la familia de curvas

$$p(x, E) = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E - mgx}. \tag{70}$$



Todas las trayectorias tienen un punto de retorno,

$$x_E = \frac{E}{mg}. \tag{71}$$

Analizaremos primero la función generatriz asociada al tramo de las trayectorias con $p \geqslant 0$. Según la ec. (63) es

$$F_2(x, E, t) = -Et + \sqrt{2m}\int_{x_E}^{x} dx\,\sqrt{E - mgx}. \tag{72}$$

La dinámica de la coordenada x está contenida en la ecuación de transformación

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial E}(x, E, t) = -t + \sqrt{2m}\,\frac{\partial}{\partial E}\int_{x_E}^{x} dx\,\sqrt{E - mgx}\,. \tag{73}$$

En este ejemplo la integración es trivial pero, según hemos indicado, habitualmente resulta más sencillo pasar la derivada dentro de la integral que integrar y luego tomar la derivada. Seguiremos aquí ese camino a modo ilustrativo, aunque la ventaja no llegue a apreciarse. Este ejemplo es tan simple que, debido a que E y x aparecen sólo en la combinación $E - mgx$, ni siquiera hay que hacer la integral. Dentro de la integral, la derivada respecto de E puede transformarse en una derivada respecto de x. En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial E}\int_{x_E}^{x} dx\sqrt{E - mgx} = \int_{x_E}^{x} dx\,\frac{\partial}{\partial E}\sqrt{E - mgx} = -\frac{1}{mg}\int_{x_E}^{x} dx\,\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{E - mgx} = -\frac{1}{mg}\sqrt{E - mgx}\,. \tag{74}$$

Aquí hemos usado todas las propiedades del punto x_E que detallamos más arriba, es decir, que $E - mgx_E = 0$ y que podemos pasar la derivada a través del símbolo integral, pese a que el extremo inferior depende de E. Luego, volviendo a la ec. (73),

$$Q = -t - \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{E}{mg} - x} = -t - \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{x_E - x}\,. \tag{75}$$

Esta ecuación da x en función del tiempo

$$x(t, E, Q) = x_E - \frac{g}{2}(t + Q)^2. \tag{76}$$

El significado de la nueva coordenada Q es el de ser igual a menos el tiempo de paso de la partícula por el punto de retorno.

Si repiten el cálculo para la otra rama del movimiento, aquella que surge de tomar

$$W(x, E) = -\sqrt{2m}\int_{x_E}^{x} dx\,\sqrt{E - mgx}\,, \tag{77}$$

no es difícil seguir el rastro del signo menos. El signo menos siempre va acompañando a la raíz de $E - mgx$. Al llegar a la ec. (75) encontrarían que ahora es

$$Q = -t + \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{x_E - x}\,. \tag{78}$$

Cuando despejen x notarán que el signo frente a la raíz es irrelevante, porque lo van a estar elevando al cuadrado. La solución para x sigue siendo la misma ec. (76).

Esto también puede verse sin hacer el rastreo del signo a lo largo de las ecuaciones. Sabemos que la trayectoria es simétrica respecto del tiempo t_0 en el que la partícula pasa por el punto de retorno. Debido a que $Q = -t_0$, la ec. (76) se lee como

$$x(t, E, Q) = x_E - \frac{g}{2}(t - t_0)^2, \tag{79}$$

que es simétrica respecto de t_0. Eso muestra que la solución es válida para todo tiempo.

5.3. Ningún misterio

Nuestro resultado principal ha sido la ec. (67),

$$t + Q = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_E}^{x} dx\,\frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}, \tag{80}$$

que contiene implícita la información sobre la dependencia de x como función del tiempo. Hemos llegado a ese resultado mediante el formalismo de H–J, pero en realidad es algo que está al alcance de cualquier alumno de Física 1. No se necesita haber escuchado hablar ni de Hamilton ni de Jacobi. Miren la ecuación detenidamente y traten de entender por qué digo que es un resultado trivial. Tómense el tiempo que sea necesario.

En casi todos los problemas de la Guía 7, pueden emplearse medios mucho más elementales que la ecuación de H–J para obtener las soluciones de las ecuaciones de movimiento. En todos los problemas unidimensionales es así. La potencia del formalismo de H–J sólo puede apreciarse en problemas con más de un grado de libertad, y aún así no es en las integrales que hay que resolver en donde se concentra la dificultad. Escribir las integrales es ya haber resuelto el problema. Para llegar a las integrales, la ecuación de H–J debe separarse completamente. Lo verdaderamente difícil es encontrar sistemas de coordenadas en donde la ecuación de H–J sea separable. Un caso especial de separabilidad lo dan las coordenadas cíclicas, que son el tema de la siguiente sección.

6. Coordenadas cíclicas

En la sección anterior vimos que si H no depende explícitamente del tiempo, la solución de la ecuación de H–J puede buscarse en la forma de una función lineal del tiempo más una función de las coordenadas,

$$S(q_1, \ldots, q_n, t) = -Et + W(q_1, \ldots, q_n). \tag{81}$$

Ocurre una separación similar cuando hay coordenadas cíclicas.

Es suficientemente ilustrativo considerar un sistema con 2 grados de libertad. Supongamos que la coordenada q_2 sea cíclica, de modo que

$$H = H(q_1, p_1, p_2, t). \tag{82}$$

La ecuación de H–J se lee como

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, q_2, t) + H\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}(q_1, q_2, t), \frac{\partial S}{\partial q_2}(q_1, q_2, t), t\right) = 0. \tag{83}$$

Por analogía con el modo en que antes separamos t, buscamos una solución de la forma

$$S(q_1, q_2, t) = W_1(q_1, t) + W_2(q_2). \tag{84}$$

Reemplazando en la ecuación de H–J resulta

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}(q_1, t) + H\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}(q_1, t), W_2'(q_2), t\right) = 0. \tag{85}$$

Esta igualdad debe cumplirse para cualquier valor de q_2. Esto sólo puede ser cierto si

$$W_2'(q_2) = \alpha_2, \tag{86}$$

donde α_2 es una constante. En otras palabras, debe ser

$$W_2(q_2) = \alpha_2 q_2. \tag{87}$$

La variable q_2 ha sido eliminada. Obtenemos así una ecuación diferencial para $W_1(q_1, t)$,

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}(q_1, t) + H\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}(q_1, t), \alpha_2, t\right) = 0, \tag{88}$$

cuya solución dependerá de la constante de separación α_2,

$$W_1 = W_1(q_1, \alpha_2, t). \tag{89}$$

Sabemos que esto no alcanza para definir una función generatriz, pues necesitamos otra dependencia para incluir los dos impulsos P_i. Esa dependencia adicional deberá surgir naturalmente al resolver la ec. (88). No podemos anticipar cómo, pero una vez resuelta la ecuación (88) deberemos tener un lugar extra para alojar el otro impulso P_2,

$$W_1 = W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2, t). \tag{90}$$

La función principal de Hamilton será

$$S(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2, t) = W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_2 q_2, \tag{91}$$

y la podremos usar para construir una función generatriz de tipo F_2. La asociación más directa consiste en definir

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2, t) = W_1(q_1, P_1, P_2, t) + P_2 q_2. \tag{92}$$

Puesto que para una función generatriz de tipo 2 es

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_2} = p_2, \tag{93}$$

vemos que el nuevo impulso P_2, que es constante, coincide con el impulso conservado p_2.

Si además de ser q_2 cíclica, el sistema hubiera sido conservativo, habríamos buscado la función principal de Hamilton de la forma

$$S(q_1, q_2, t) = -Et + \alpha_2 q_2 + W_1(q_1), \tag{94}$$

donde W_1 satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$H\Big(q_1, W_1'(q_1), \alpha_2\Big) = E. \tag{95}$$

Al escribir la solución de esta ecuación, debemos incorporar en W_1 la dependencia en las constantes de separación E y α_2. La constante E se identifica con la energía E (o más precisamente con la constante h) y la constante α_2, con la cantidad de movimiento conservada p_2. Del mismo modo, la función principal de Hamilton podrá considerarse función de las constantes de separación

$$S = S(q_1, q_2, E, \alpha_2, t) = -Et + \alpha_2 q_2 + W_1(q_1, E, \alpha_2). \tag{96}$$

Tenemos así el número suficiente de variables para definir una F_2.

6.1. Un ejemplo

Para un potencial central, el hamiltoniano en coordenadas esféricas de una partícula que se mueve en el plano $z = 0$ no depende del ángulo φ,

$$H(r, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r). \tag{97}$$

Buscamos la función principal de Hamilton separando las variables t y φ,

$$S(r, \varphi, t) = -Et + \alpha_2 \varphi + W_r(r). \tag{98}$$

Según hemos notado anteriormente, la constante de separación α_2 es igual al impulso conservado p_φ. Hecha esa identificación, la ecuación para la función W_r resulta

$$H\Big(r, W_r'(r), p_\varphi\Big) = E. \tag{99}$$

Explícitamente es

$$\frac{1}{2m} W_r'(r)^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) = E. \tag{100}$$

Debido a que $W_r' = p_r$, reconocemos aquí la ecuación de conservación del problema unidimensional equivalente para el movimiento radial. Esta ecuación combina la conservación de la energía con la del momento angular. Al resolver la ec. (100), se incorporan en la definición de W_r las dependencias en E y p_φ. El resultado es

$$W_r(r, E, p_\varphi) = \pm\sqrt{2m} \int^r dr \, \sqrt{E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}}\,, \tag{101}$$

y la función principal de Hamilton se escribe como

$$S(r, \varphi, E, p_\varphi) = -Et + p_\varphi \varphi \pm \sqrt{2m} \int^r dr \, \sqrt{E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}\,. \tag{102}$$

El signo $+$ corresponde al tramo de la trayectoria donde $p_r \geqslant 0$, y viceversa.

Podemos extraer de aquí la evolución de r en el tiempo y la ecuación de la órbita $r(\varphi)$. En efecto, considerando a S como función generatriz de tipo F_2 e identificando E y p_φ con los nuevos impulsos, la coordenada canónica conjugada de E es

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int^r dr \, \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}}}. \tag{103}$$

Puesto que el nuevo hamiltoniano es nulo, Q_1 es constante y esta ecuación da implícitamente r como función de t,

$$t + Q_1 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int^r dr \, \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}}}. \tag{104}$$

Por otro lado, la variable canónica conjugada al *nuevo* impulso p_φ es

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = \varphi \mp \frac{1}{\sqrt{2m}} \int^r \frac{dr}{r^2} \frac{p_\varphi}{\sqrt{E - V(r) - \dfrac{p_\varphi^2}{2mr^2}}}. \tag{105}$$

Esta ecuación define implícitamente r como función de φ,

$$\varphi - Q_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2m}} \int^r \frac{dr}{r^2} \frac{p_\varphi}{\sqrt{E - V(r) - \dfrac{p_\varphi^2}{2mr^2}}}. \tag{106}$$

Noten especialmente que en ningún momento se hace necesario calcular la integral que figura en la definición de S, ec. (102). Siempre estamos calculando derivadas de esta función, y esas derivadas pueden pasar dentro de la integral. Las integrales que resultan luego de derivar respecto de las constantes E y p_φ suelen ser mucho más sencillas que la integral original en la ec. (102). En la práctica, habrá que hacer una elección específica del extremo inferior de las integrales, de ser posible un punto de retorno.

Les propongo que hagan una pausa y deduzcan los resultados anteriores con el formalismo de fuerzas centrales que vimos en la primera parte de la materia.

7. Problema 6

- Considere el hamiltoniano

$$H(q,p) = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2. \tag{107}$$

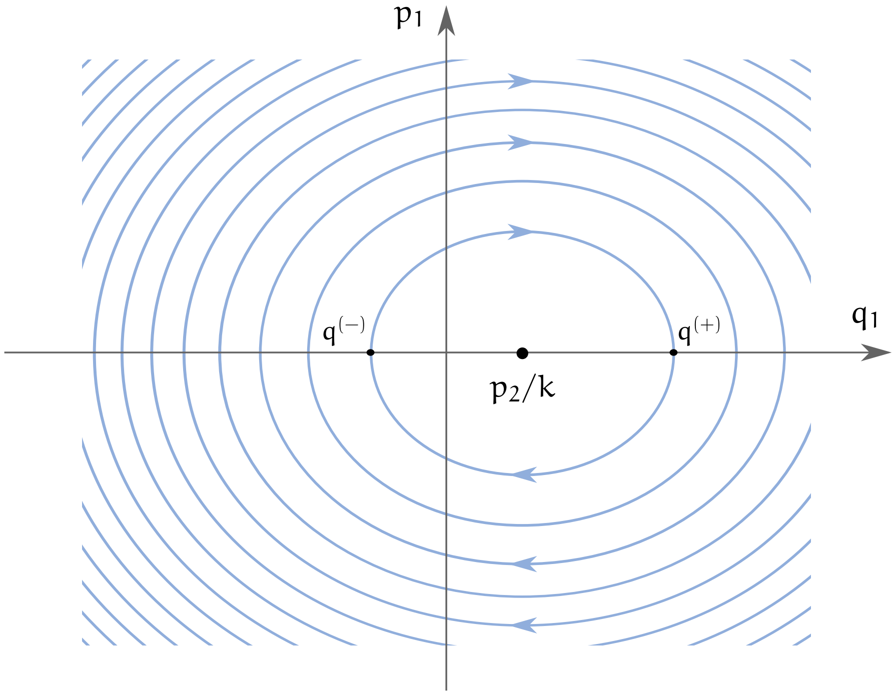
Resuelva el problema con el método de H–J. ¿Qué sistema podría corresponder a este problema?

Analicemos brevemente el tipo de órbitas que podemos esperar en este problema. La coordenada q_2 es cíclica, por lo tanto p_2 es una constante de movimiento. Para cada valor de p_2 podemos graficar el retrato de fase en el plano $q_1 p_1$, es decir, las órbitas proyectadas en ese plano que corresponden a valores determinados de E y p_2. A partir del hamiltoniano (107) esas órbitas satisfacen la ecuación

$$\frac{p_1^2}{2mE} + \frac{(q_1 - p_2/k)^2}{2mE/k^2} = 1. \tag{108}$$

Son elipses en el plano $q_1 p_1$ centradas en $(p_2/k, 0)$ como muestra la figura de la página siguiente. El sentido de circulación está dado por la relación $\dot{q}_1 = p_1/m$, de modo q_1 aumenta para $p_1 > 0$ y disminuye para $p_1 < 0$. Además, para cada par de valores de E y p_2 la órbita en el plano $q_1 p_1$ tiene dos puntos de retorno, donde $\dot{q}_1 = 0$,

$$q^{(\pm)}(E, p_2) = \frac{1}{k}\left(p_2 \pm \sqrt{2mE}\right). \tag{109}$$



Debido a que el sistema es conservativo y a que la coordenada q_2 es cíclica, buscaremos una solución de la ecuación de H–J para la función principal de Hamilton de la forma

$$S(q_1, q_2, t) = -Et + p_2 q_2 + W_1(q_1). \tag{110}$$

Aquí ya usamos p_2 como constante de separación; podríamos haberle llamado α_2, pero como la identificación es inmediata eso no tiene mayor sentido. Teniendo en cuenta que el hamiltoniano no depende de q_2, la ecuación de H–J es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}\right) = 0. \tag{111}$$

Cuando S tiene la forma (110) la ecuación de H–J se reduce a esta otra

$$H\Big(q_1, W_1'(q_1), p_2\Big) = E. \tag{112}$$

Explícitamente, para el hamiltoniano (107) queda

$$\frac{1}{2m} W_1'(q_1)^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2 = E. \tag{113}$$

De aquí despejamos

$$W_1'(q_1) = \pm\sqrt{2mE - (p_2 - kq_1)^2}\,. \tag{114}$$

El signo positivo corresponde a las regiones de movimiento en donde $p_1 \geqslant 0$, y viceversa. Para integrar la ec. (114) usaremos como límite inferior de integración el punto $q^{(-)}(E, p_2)$,

$$W_1(q_1, E, p_2) = \pm \int_{q^{(-)}(E,p_2)}^{q_1} dq\, \sqrt{2mE - (p_2 - kq)^2}\,. \tag{115}$$

Notar que en la definición de W incorporamos su dependencia en E y p_2. Por enésima vez hacemos énfasis en que no es necesario resolver la integral en esta instancia. Lo fundamental es calcular las derivadas de W_1. Suele ser más fácil derivar primero e integrar después.

La manera más directa de definir la función generatriz F_2 es alojando a los nuevos impulsos en los lugares que ocupan E y p_2 dentro de la función S. En lugar de renombrar estas variables como P_1 y P_2, llamaremos a los nuevos impulsos con los nombres E y p_2,

$$F_2(q_1, q_2, E, p_2) = S(q_1, q_2, E, p_2) = -Et + p_2 q_2 + W(q_1, E, p_2). \tag{116}$$

La nueva coordenada conjugada de E es

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W_1}{\partial E}(q_1, E, p_2) = -t \pm m \int_{q^{(-)}(E,p_2)}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{2mE - (p_2 - kq)^2}}. \tag{117}$$

Es importante notar que al introducir la derivada dentro de la integral pudimos pasar por alto el hecho de que el extremo de integración fuera una función de E. Si derivamos respecto al extremo inferior de integración, tendríamos que evaluar el integrando de la ec. (115) en $q^{(-)}$. Pero, por definición de los puntos de retorno, el integrando es nulo cuando se lo evalúa en cualquiera de ellos.

La integral en la ec. (117) es elemental. El resultado es

$$Q_1 = -t \pm \frac{m}{k}\left[\arccos\left(\frac{p_2 - kq_1}{\sqrt{2mE}}\right) - \arccos\left(\frac{p_2 - kq^{-}(E, p_2)}{\sqrt{2mE}}\right)\right]. \tag{118}$$

Usando la definición (109), tenemos

$$\frac{p_2 - kq^{\pm}(E, p_2)}{\sqrt{2mE}} = \mp 1. \tag{119}$$

Luego,

$$Q_1 = -t \pm \frac{m}{k} \arccos\left(\frac{p_2 - kq_1}{\sqrt{2mE}}\right). \tag{120}$$

Invirtiendo la ec. (120) obtenemos q_1 como función del tiempo y de las constantes de movimiento

$$q_1(t, E, p_2, Q_1) = \frac{1}{k}\left[p_2 - \sqrt{2mE}\cos\left(\frac{k}{m}(t + Q_1)\right)\right]. \tag{121}$$

La duplicidad de signos desapareció al tomar el coseno. En $t = -Q_1$ la partícula está en el punto de retorno $q^{(-)}$.

La coordenada canónicamente conjugada a p_2 también será constante. La ecuación de transformación que define esta coordenada es

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial p_2} = q_2 + \frac{\partial W_1}{\partial p_2}(q_1, E, p_2). \tag{122}$$

Aquí también podemos pasar la derivada a través del signo integral en la ec. (115),

$$Q_2 = q_2 \pm \int_{q^{(-)}(E,p_2)}^{q_1} dq \ \frac{\partial}{\partial p_2}\sqrt{2mE - (p_2 - kq)^2}\,. \tag{123}$$

En el integrando, p_2 aparece sólo en la combinación $p_2 - kq$. Derivar con respecto a p_2 será, salvo una constante multiplicativa, equivalente a derivar respecto de q, con la ventaja de que entonces estaremos calculando la integral de una derivada:

$$Q_2 = q_2 \mp \frac{1}{k}\int_{q^{(-)}(E,p_2)}^{q_1} dq \ \frac{\partial}{\partial q}\sqrt{2mE - (p_2 - kq)^2} = q_2 \mp \frac{1}{k}\sqrt{2mE - (p_2 - kq_1)^2}\,. \tag{124}$$

Como ya ocurrió otras veces, el término que correspondería a evaluar en el extremo inferior de la integral es nulo, porque se trata de un punto de retorno. La ecuación anterior no involucra al tiempo, da q_2 como función de q_1 y, por lo tanto, representa la proyección de la órbita en el plano $q_1 q_2$. La ecuación que satisfacen estas coordenadas es

$$\left(q_1 - \frac{p_2}{k}\right)^2 + (q_2 - Q_2)^2 = \frac{2mE}{k^2}. \tag{125}$$

Esto define círculos en el plano $q_1 q_2$. Las constantes Q_2 y p_2 dan la ubicación del centro de la órbita, mientras que la constante E da el radio,

$$R(E) = \sqrt{\frac{2mE}{k^2}}. \tag{126}$$

De la ec. (121) obtenemos el período de la órbita

$$T = \frac{2\pi m}{|k|}. \tag{127}$$

Para escribir q_2 como función del tiempo, reemplazamos la solución (121) en la ec. (124), con lo que resulta

$$q_2 = Q_2 \pm \frac{1}{k}\sqrt{2mE}\left|\sin\left(\frac{k}{m}(t + Q_1)\right)\right|. \tag{128}$$

El signo positivo corresponde a los intervalos de tiempo en los que $\dot{q}_1 > 0$, y viceversa. Pero, según la ec. (121),

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{2E}{m}}\sin\left(\frac{k}{m}(t + Q_1)\right). \tag{129}$$

Esto quiere decir que cuando

$$\sin\left(\frac{k}{m}(t + Q_1)\right) > 0, \tag{130}$$

corresponde usar el signo positivo en la ec. (128), y viceversa. Pero esos son los mismos signos que corresponde elegir al escribir el valor absoluto de la función seno. En definitiva

$$q_2 = Q_2 + \frac{1}{k}\sqrt{2mE}\,\sin\left(\frac{k}{m}(t+Q_1)\right). \tag{131}$$

Para tener ambas ecuaciones de movimiento a la vista, copiamos aquí la ec. (121),

$$q_1 = \frac{p_2}{k} - \frac{1}{k}\sqrt{2mE}\,\cos\left(\frac{k}{m}(t+Q_1)\right). \tag{132}$$

Está claro entonces que si $k > 0$ la trayectoria en el plano $q_1 q_2$ es recorrida en el sentido horario, y en sentido antihorario si $k < 0$.

Mostraremos ahora que el hamiltoniano de este sistema corresponde al de una partícula que se mueve en el plano xy en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\,\hat{z}$. En general es

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2. \tag{133}$$

Para obtener algo parecido al hamiltoniano del enunciado,

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2, \tag{134}$$

deberíamos tener un potencial vector de la forma $\mathbf{A} = \lambda x\,\hat{y}$. En efecto, tomando el rotor de este potencial encontramos

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\lambda x\,\hat{y}) = \lambda\,\hat{z}. \tag{135}$$

Por lo tanto, debe ser $\lambda = B$ y

$$\mathbf{A}(x, y) = xB\,\hat{y}. \tag{136}$$

Entonces resulta

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{eB}{c}x\right)^2. \tag{137}$$

Los hamiltonianos (134) y (137) son equivalentes si identificamos a x e y con q_1 y q_2 y si

$$k = \frac{eB}{c}. \tag{138}$$

Para una órbita de radio R, el equilibrio entre la fuerza y la aceleración centrípeta da

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{|eB|v}{c}, \tag{139}$$

lo que implica

$$R = \frac{mc}{|eB|}v = \frac{c}{|eB|}\sqrt{2mE}. \tag{140}$$

Si identificamos k como en la ec. (138), obtenemos

$$R = \frac{1}{|k|}\sqrt{2mE}, \tag{141}$$

que coincide con el resultado (126). El sentido de giro de la partícula, dictado por la ecuación $\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{mc}\boldsymbol{v} \times \mathbf{B}$, también está de acuerdo con la identificación (138).